

# Penroseovo popločavanje i struktura kvazikristala

---

Čemerin, Katja

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Chemical Engineering and Technology / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:149:578166>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Chemical Engineering and Technology University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ EKOINŽENJERSTVA

Katja Čemerin

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ EKOINŽENJERSTVA

Katja Čemerin

PENROSEOVO POPLOČAVANJE I STRUKTURA KVAZIKRISTALA  
ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada: doc. dr. sc. Erna Begović Kovač

Članovi ispitnog povjerenstva: doc. dr. sc. Erna Begović Kovač

doc. dr. sc. Miroslav Jerković

doc. dr. sc. Dajana Kučić Grgić

Zagreb, 2021.

## Sažetak

Popločavanje predstavlja prekrivanje prostora geometrijskih likovima bez rupa i preklapanja te ga je moguće primijeniti na proučavanje struktura čvrstih odnosno kristalnih tvari. Struktura kristala ponavlja se u svim smjerovima na periodičan način, a osnovna prostorna jedinica kristala je jedinična ćelija. Do 80-ih godina vjerovalo se da sve čvrste stvari posjeduju ovakve savršene strukture, no proučavajući legure metala otkriveno je da mnoge tvari posjeduju nedopuštene rotacijske simetrije te je njihova struktura u stvarnosti kvaziperiodična. Za razumijevanje ovakvih struktura potrebno je primijeniti neperiodična popločavanja koja je proučavao matematičar Roger Penrose. Kod neperiodičnog popločavanja nikada neće doći do ponavljanja uzorka, a Penrose uspjeva neperiodično popločavanje svesti na korištenje samo dva oblika koje naziva „zmaj“ i „strijela“.

**Ključne riječi** – neperiodičnost, Penroseovo popločavanje, kvazikristali, ikosaedar

## Abstract

Tiling is the covering of space with geometric figures without holes and overlaps, and it can be applied to the study of the structures of solid or crystalline substances. The structure of the crystal is repeated in all directions in a periodic manner, and the basic spatial unit of the crystal is the unit cell. Until the 1980s, all solids were believed to possess such perfect structures, but studying metal alloys revealed that many substances possess impermissible rotational symmetries and their structure is in fact quasi-periodic. To understand such structures it is necessary to apply the non-periodic tiling studied by the mathematician Roger Penrose. With non-periodic tiling, the pattern will never be repeated and Penrose manages to reduce the non-periodic tiling to using only two shapes, which he calls "kite" and "dart".

**Keywords** - non-periodicity, Penrose tiling, quasicrystals, icosahedron

# Sadržaj

<b>Popis slika</b> .....	5
<b>UVOD</b> .....	6
<b>OPĆI DIO</b> .....	7
<b>1. Roger Penrose</b> .....	7
1.1. Istraživanja .....	8
<b>2. Popločavanje ravnine</b> .....	10
2.1. Pravilno poločavanje ravnine .....	10
2.2. Polupravilna ili Arhimedova popločavanja ravnine .....	12
2.3. Penroseovo popločavanje .....	14
<b>3. Struktura kvazikristala</b> .....	20
3.1. Difrakcija i otkriće kvazikristala .....	20
3.2. Kvazikristali u prirodi .....	25
<b>ZAKLJUČAK</b> .....	26
<b>LITERATURA</b> .....	27

## Popis slika

Slika 1. Roger Penrose.....	7
Slika 2. Penroseov trokut i Penroseovo stubište.....	8
Slika 3. Popločavanje ravnine jednakokraničnim trokutima.....	11
Slika 4. Popločavanje ravnine kvadratima.....	11
Slika 5. Popločavanje ravnine šesterokutima.....	12
Slika 6. Primjer Arhimedovog popločavanje.....	13
Slika 7. Zmaj i strijela.....	14
Slika 8. Romb sastavljen pomoću Penroseovih zmaja i strijele.....	15
Slika 9. Penroseov uzorak.....	15
Slika 10. Oblici kojima je moguće započeti Penroseov uzorak.....	16
Slika 11. Sunce i zvijezda.....	17
Slika 12. Uzorak beskonačnog kotača.....	17
Slika 13. Popločavanje Penroseovim rombovima.....	18
Slika 14. Platonova tijela.....	20
Slika 15. Difrakcijski uzorci dobiveni iz jednog zrna ikosaedarske strukture...21	
Slika 16. Primjer jednodimenzionalnog Fibonaccijevog/kvaziperiodičnog niza dobivenog projekcijom dvodimenzionalne kubične rešetke.....	23
Slika 17. Mackayev i Bergmanov tip grozda.....	24
Slika 18. Prvi prirodni kvazikristal.....	25

## UVOD

Proučavanjem kristalnih struktura otkriveno je da kristali imaju određenu strukturu koja se periodički ponavlja u svim smjerovima te posjeduju određenu simetriju. Periodična struktura najbolje se može objasniti proučavajući popločavanje te je ono periodično ukoliko je moguće slaganje oblika isključivo njihovom translacijom. Kristali mogu posjedovati rotacijsku simetriju 2., 3., 4. i 6. reda. Svaka od tih simetrija predstavlja kut od  $\frac{360^\circ}{n}$ , gdje je  $n=2,3,4,6$ , za koji je moguće zarotirati oblik tako da on izgleda isto nakon rotacije.

U stvarnosti mali broj kristala posjeduje savršenu strukturu te postoje defekti zbog čega njihova struktura nije periodična. Neperiodična popločavanja proučavao je matematičar Roger Penrose.

Penrose je profesor emeritus na Sveučilištu u Oxfordu, a kroz život bavi se teorijskom matematikom i fizikom, a posebno se interesira za proučavanje svemira te prostora i vremena. Ističe se za rad na crnim rupama sa Stephenom Hawkingom za što 2020. godine dobiva Nobelovu nagradu.

Penrose također proučava tzv. nedopuštene geometrijske oblike, a 1974. godine otkriva dvije pločice pomoću kojih je moguće popločati prostor bez da dođe do ponavljanja uzorka, odnosno kojima je moguće isključivo neperiodično popločavanje. Pločice naziva „zmaj“ i „strijela“, a one su zapravo jedan „široki“ te jedan „uski“ romb.

Neperiodično popločavanje primijenjeno je na proučavanje kvazikristala, a sve do 80-ih godina vjerovalo se da su strukture čvrstih tvari kristalne. Kvazikristali su krutine koje posjeduju nedopuštene rotacijske simetrije kao što je simetrija 5. reda.

## OPĆI DIO

### 1. Roger Penrose

Roger Penrose je britanski matematičar koji se bavi istraživanjima u područjima matematike i teorijske fizike. Penrose je diplomirao na Sveučilištu Londonu te upisuje doktorat na Sveučilištu u Cambridgeu pod mentorstvom Williama Hodgea gdje se bavi istraživanjima u području algebarske geometrije. Ubrzo shvaća da se njegova područja interesa razlikuju od Hodgea te završava svoj doktorat pod mentorstvom Johna Todda s temom „Tenzorske metode u algebarskoj geometriji“. Penrose je poznat po mnogim otkrićima vezanim za matematiku, teoriju relativnosti i kvantnu teoriju među kojima je najpoznatiji njegov rad na crnim rupama u suradnji sa Stephenom Hawkingom. Penrose dobiva Nobelovu nagradu 2020. godine za otkriće da opća teorija relativnosti predviđa nastajanje crne rupe [1].

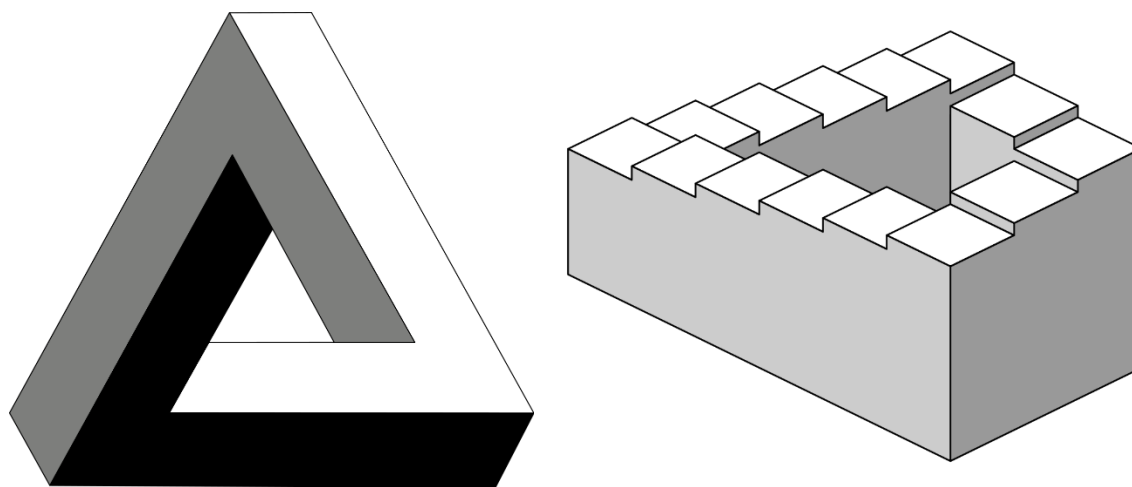


*Slika 1.* Roger Penrose (Festival della Scienza, 2011.)



## 1.1. Istraživanja

Kao student, zajedno sa svojim ocem, Penrose objavljuje članak o nemogućim objektima kao što su nemogući trokut, poznat kao Penroseov trokut koji je sastavljen tri grede postavljene pod pravim kutem te beskrajno stubište, koje čini beskrajnu petlju gdje se moguće istovremeno spuštati i uspinjati. Oba objekta su optičke varke koje krše zakone euklidske geometrije.



*Slika 2.* Penroseov trokut (lijevo) i Penroseovo stubište (desno)

Nakon studija, gdje se bavi teorijskom matematikom, Penrose se počinje interesirati za fiziku te primjenjuje matematiku za izračunavanje svojstava prostora i vremena. U svom radu, "Gravitacijski kolaps i prostorno-vremenski singularitet", Penrose [2] objašnjava kako objekt kao umiruća zvijezda koja implođira, ništa ne može spriječiti u nastanju toliko jakog gravitacijskog polja da dođe do stvaranja singulariteta, odnosno geometrijske točke u prostoru u kojoj je masa komprimirana do beskonačne gustoće. Zajedno sa Hawkingom dolazi do Penrose-Hawkingovog teorema singulariteta pomoću kojeg primjenjuje gravitacijski kolaps na kozmologiju i opisuje singularitet velikog praska za što 2020. godine Penrose dobiva Nobelovu nagradu. Doprinos Penrosea gravitacijskom kolapsu bio je ključan, počevši od njegove pretpostavke o kozmičkoj cenzuri gdje objašnjava da će se svaka slijedeća singularnost nalaziti unutar horizonta događaja okruženog skrivenim vremensko-prostornim područjem koje je kasnije nazvano crna rupa.

Penrose pokušava povezati kvantnu teoriju i opću teoriju relativnosti pomoću teorije tvistora u kojoj predlaže kako prostor-vrijeme nastaju u tzv. tvistorском

prostoru. Velik doprinos Penrosea su i spinske mreže odnosno Penroseovi dijagrami koji predstavljaju uzročno-posljedične veze između različitih točaka u prostoru i vremenu. Penrose 2004. godine objavljuje vodič za zakone fizike kojim predviđa vezu između kvantne mehanike i opće relativnosti u kojem predlaže da kvantno stanje ostaje u superpoziciji dok zakrivljenost prostora i vremena ne dostigne neku značajnu razinu.

Godine 1974. otkriva Penroseovo popločavanje koje predstavlja dvije pločice s kojima je moguće popločavati isključivo neperiodički. Pomicanjem ovakvih pločica, bez njihove rotacije, nikada neće biti proizveden isti uzorak. Penroseove pločice imaju refleksijsku simetriju te prve ukazuju na rotacijsku simetriju 5. reda. Kasnije su ovakvi uzorci uočeni u rasporedu atoma u kvazikristalima.

Penrose se također interesira za definiranje svijesti, o čemu je napisao dvije knjige *The Emperor's New Mind* (1989.) i *Shadows of the Mind* (1994.) u kojima tvrdi da je za objašnjavanje svijesti potrebna kvantna mehanika [3].

## 2. Popločavanje ravnine

Pod pojmom popločavanje ravnine podrazumijeva se prekrivanje ravnine određenim geometrijskim likovima bez da dođe do njihovog međusobnog preklapanja i bez praznina. Prema definiciji popločavanje je prebrojiva familija zatvorenih skupova (pločica) koji ispunjavaju čitav prostor odnosno ravninu. Ukoliko dolazi do preklapanja pločica govorimo o prekrivanju, a ako postoje rupe odnosno praznine radi se o pakiranju [4].

Ukoliko je ravninu moguće popločati translacijom, odnosno pomicanjem objekta bez njegove rotacije ili refleksije, takvo popločavanje je periodično. Translacijska simetrija postoji ukoliko pomicanjem objekta on ostaje nepromijenjen. Periodično popločavanje moguće je oblicima kao što su pravilni trokut, četverokut ili šesterokut. Ovakvi oblici posjeduju rotacijske simetrije drugog, trećeg, četvrtog ili šestog reda.

Elementi popločavanja su čvorište i rub pločice. Svaki rub pločice se podudara sa rubovima pločica koje leže sa svake strane. Rub povezuje dva čvorišta pločica koja se još nazivaju i krajnje točke ruba. Najmanji broj čvorišta prilikom popločavanja mora biti tri.

### 2.1. Pravilno popločavanje ravnine

Geometrijski oblik rotacijski je simetričan ukoliko rotacijom oko njegove osi za određeni kut izgleda identično kao početni oblik. Kut za koji se određeni oblik rotira dobije se tako da se  $360^\circ$  podijeli s prirodnim brojem  $n$  takvim da je  $360$  višekratnik od  $n$ . Pri tome dobivamo skupinu oblika sa zajedničkom rotacijskom simetrijom  $C_n$ .

Kod pravilnih  $n$ -terokuta zbroj kutova možemo dobiti izrazom

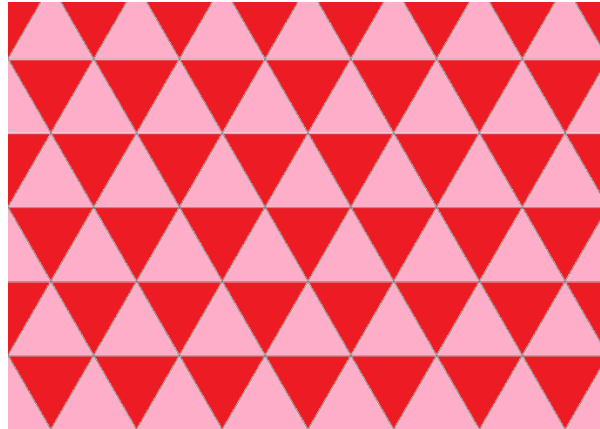
$$(n - 2) \times 180^\circ. \quad (2.1)$$

Iznos svakog pojedinačnog kuta jednak je:

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}. \quad (2.2)$$

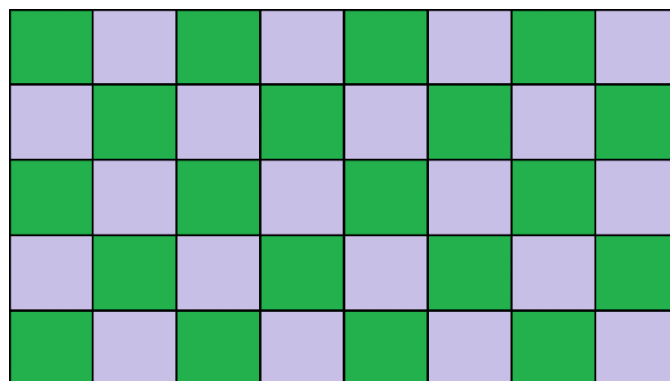
Uzmemo li za primjer pravilan jednakostraničan trokut u kojem je  $n=3$ , vidimo da zbroj kutova iznosi  $180^\circ$ , a svaki pojedinačni kut  $60^\circ$ . Također, podijelimo li  $360^\circ$

sa  $n=3$  dobivamo  $120^\circ$ , odnosno kut za koji možemo zarotirati ovakav trokut da se ponovno dobije identičan početni oblik. Na Slici 3 prikazano je pravilno popločavanje ravnine trokutima. Ovakvo popločavanje označava se sa  $(3,3,3,3,3,3)$  gdje svaki broj predstavlja jednu stranicu mnogokuta koja se sastaje u čvorištu. U svakom čvorištu sastaje se šest jednakostraničnih trokuta.



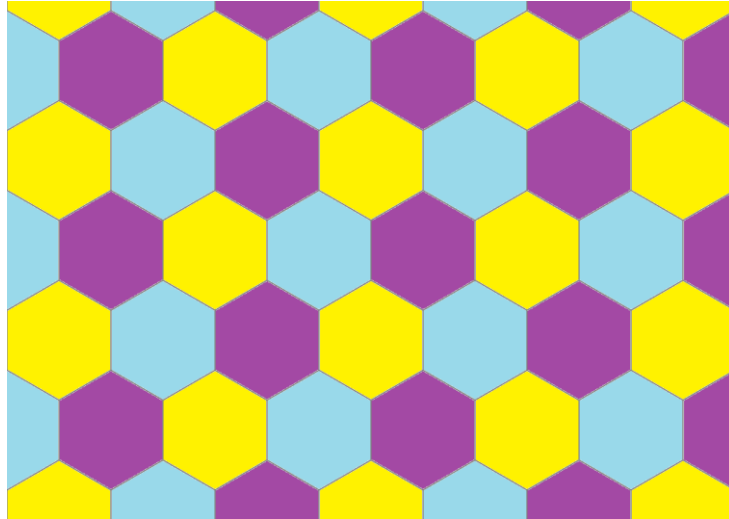
**Slika 3.** Popločavanje ravnine jednakostraničnim trokutima

Na Slici 4 prikazano je popločavanje ravnine kvadratima,  $n=4$ . Ovakvo popločavanje možemo označiti sa  $(4,4,4,4)$  jer se u svakom čvorištu sastaju četiri kvadrata.



**Slika 4.** Popločavanje ravnine kvadratima

Pravilnim šesterokutima također je moguće periodično popločati prostor te se ovakvo popločavanje označava sa  $(6,6,6)$ . (Slika 5)



*Slika 5.* Popločavanje ravnine šesterokutima

## 2.2. Polupravilna ili Arhimedova popločavanja ravnine

Arhimedova popločavanja posebna su vrsta popločavanja kod kojih se u čvorištima sastaje više vrsta pravilnih mnogokuta. Kao što je prikazano u formuli 2.1, zbroj unutrašnjih kutova  $n$ -terokuta iznosi  $(n-2) \times 180^\circ$ , te iz toga slijedi:

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}, \quad (2.4)$$

gdje  $\alpha_n$  predstavlja veličinu unutarnjeg kuta. Uvrštavanjem  $n=3,4,5,6$  za pravilni trokut, četverokut, peterokut i šesterokut u formulu 2.4, dobivamo  $\alpha_3=60^\circ$ ,  $\alpha_4=90^\circ$ ,  $\alpha_5=108^\circ$  te  $\alpha_6=120^\circ$ . Kada bi se u nekoj ravnini sastajala sva četiri mnogokuta, zbroj njihovih kutova iznosio bi  $60^\circ+90^\circ+108^\circ+120^\circ=378^\circ$ , što je veće od  $360^\circ$ . Iz ovoga dolazimo do zaključka kako u razdiobi ravnine na pravilne mnogokute ne može biti više od tri mnogokuta.

Potrebno je pronaći sve moguće razdiobe, odnosno popločavanja ravnine u pravilne mnogokute, pri čemu sve stranice i čvorišta moraju biti sukladni. Uzmemo li slučaj u kojem popločavamo s dvije vrste različitih mnogokuta, onda se u jednom čvorištu sastaje se  $k_1$   $n_1$ -terokuta i  $k_2$   $n_2$ -terokuta. Također, zbroj kutova oko jednog čvorišta mora biti  $360^\circ$ , što se može zapisati pomoću jednadžbe

$$k_1 \times \frac{(n_1-2) \times 180^\circ}{n_1} + k_2 \times \frac{(n_2-2) \times 180^\circ}{n_2} = 360^\circ. \quad (2.5)$$

S obzirom da je najmanji broj mnogokuta koji se sastaju u čvorištu tri, a najveći 6 vrijedi  $3 \leq k_1 + k_2 < 6$ . Ako ove uvjete primijenimo na jednadžbu 2.5 dobivamo:

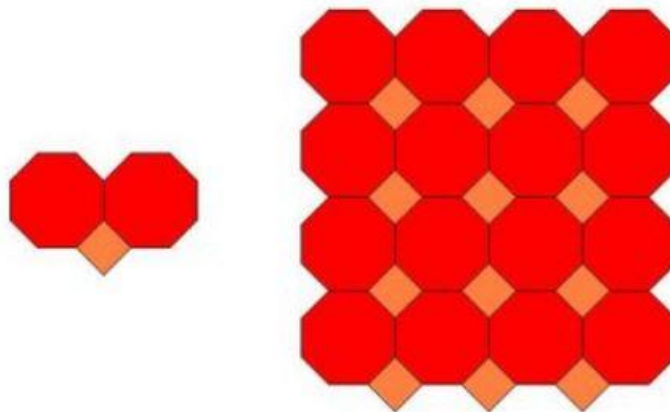
$$k_1 \times \frac{(n_1-2) \times 180^\circ}{2n_1} + k_2 \times \frac{(n_2-2) \times 180^\circ}{2n_2} = 1, \quad (2.6)$$

$$k_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} \right) + k_2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n_2} \right) = 1. \quad (2.7)$$

Uz zadane uvjete,  $3 \leq k_1 + k_2 < 6$ , moguće vrijednosti  $k_1$  i  $k_2$  prikazane su u donjoj Tablici:

$k_1$	1	2	1	3	2	1	4	2	3
$k_2$	2	1	3	1	2	4	1	3	2

Na Slici 6 prikazano je popločavanje pomoću kvadrata i dva pravilna osmerokuta:

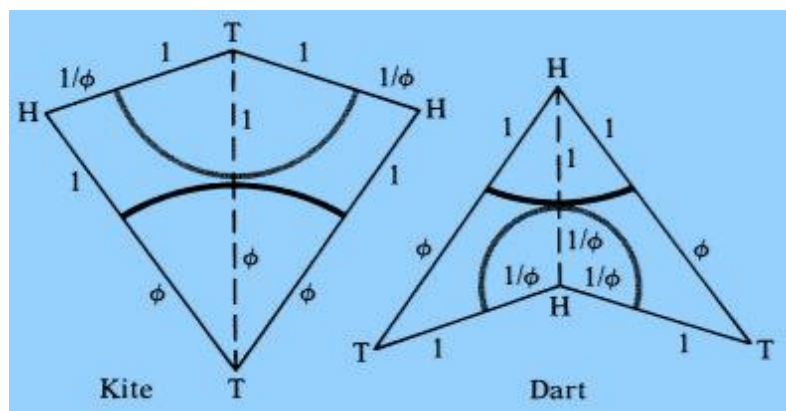


**Slika 6.** Primjer Arhimedovog popločavanja [5]

Postoji ukupno osam Arhimedovih popločavanja ravnine [5].

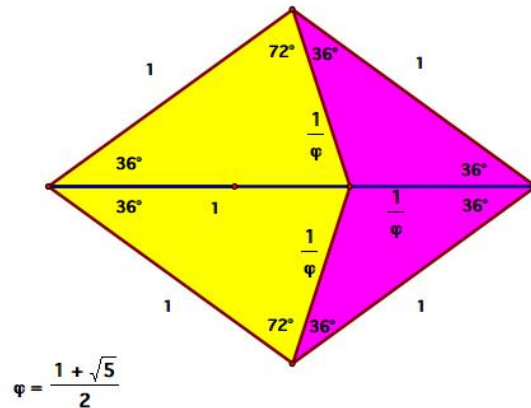
### 2.3. Penroseovo popločavanje

Periodično popločavanje predstavlja popločavanje prostora pomoću pravilnih oblika kao što su trokut, četverokut te šesterokut, kojima je moguće popločati prostor isključivo translacijom, bez rotacije ili refleksije oblika. Roger Penrose je 1973. godine pronašao set od šest pločica čije popločavanje je neperiodično. Godine kasnije pronalazi način da broj pločica svede na četiri, a kasnije i na dvije. Najpoznatiji par Penroseovih pločica su oblici zvani „zmaj“ (engl. *kite*) te „strijela“ (eng. *dart*) prikazani na Slici 7 [6].



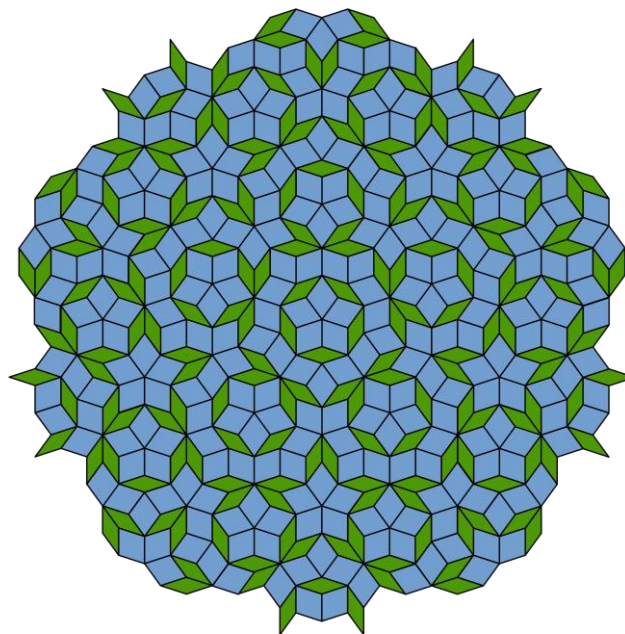
Slika 7. Zmaj (lijevo) i strijela (desno) [7]

Zmaj i strijela dobiveni su iz romba s kutovima  $72^\circ$  i  $108^\circ$  (Slika 8). Dijeljenjem najduže dijagonale na omjer  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398 \dots$  te spajanjem točke s tupim kutovima dobiveni su omjeri stranica u trokutima te oni odgovaraju zlatnom rezu,  $\varphi$ . Dobiven je i najmanji kut koji iznosi  $36^\circ$ , a ostali kutovi su njegovi višekratnici. S obzirom da je  $\varphi$  iracionalan broj, upravo na taj način dokazana je neperiodičnost Penroseovog popločavanja.



*Slika 8.* Romb sastavljen pomoću Penroseovih zmaja i strijele [8]

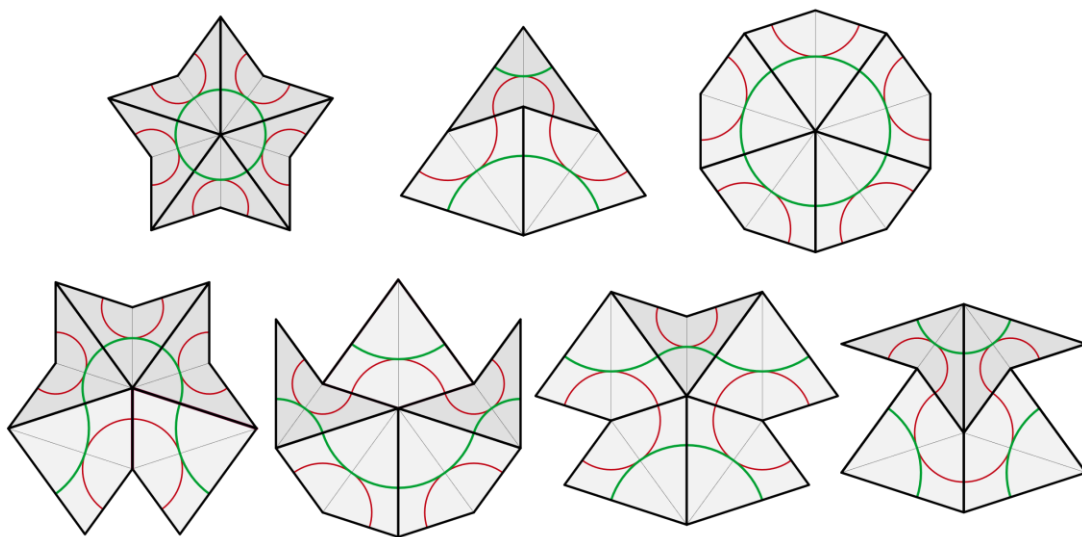
Penroseov uzorak započinje postavljanjem strijela i zmajeva oko jednog vrha te njihovim širenjem u radijalnom smjeru. Prilikom dodavanja pločica moguća su dva slučaja. U prvom slučaju moguće je staviti bilo koju pločicu, dok je u drugom potrebno birati između strijele ili zmaja kako bi se prostor u potpunosti ispunio. Moguće je naići i na kontradikciju odnosno mjesto na koje ne pristaje niti jedna pločica te se u tom slučaju potrebno vratiti i odabrati drugačiju pločicu na mjestu gdje je bilo moguće staviti bilo koju pločicu. Stoga je najbolji način za ovakvo popločavanje ispunjavanjem prvo s „prisiljenim“ pločicama odnosno onom pločicom koja pristaje u taj prostor te na taj način neće doći do kontradikcije. Na ovaj način moguće je popločavati u beskonačnost. Na Slici 9 prikazan je uzorak dobiven popločavanjem Penroseovim pločicama.



*Slika 9.* Penroseov uzorak [9]

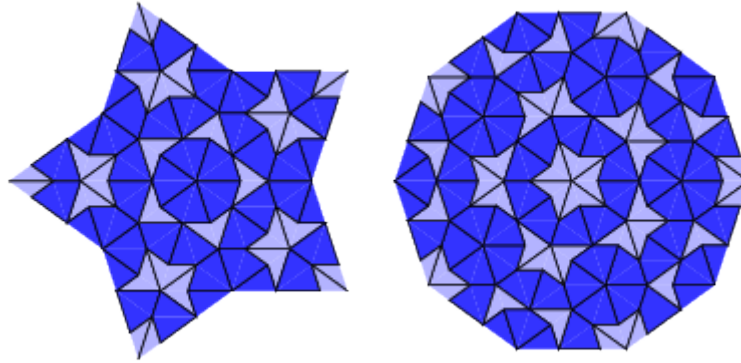


Kao što je navedeno u poglavlju 2.2., pravilni oblici posjeduju rotacijske simetrije drugog, trećeg, četvrtog ili šestog reda. Kod Penroseovog popločavanja javlja se simetrija petog reda, što znači da će rotacijom za  $36^\circ$  doći do poklapanja većeg dijela uzorka. Iako je moguće konstruirati Penroseove uzorke s visokim stupnjem simetrije, kod većine uzoraka javljaju se neočekivana odstupanja. Kada se uzorak širi, čini se kao da će se ponoviti, no to se nikada ne događa. Prema „teoremu lokalnog izomorfizma“ svi Penroseovi uzorci su slični. Penrose je uspio pokazati da je svako konačno područje u bilo kojem uzorku sadržano negdje unutar svakog drugog uzorka. Štoviše, pojavljuje se beskrajno puno puta u svakom uzorku.



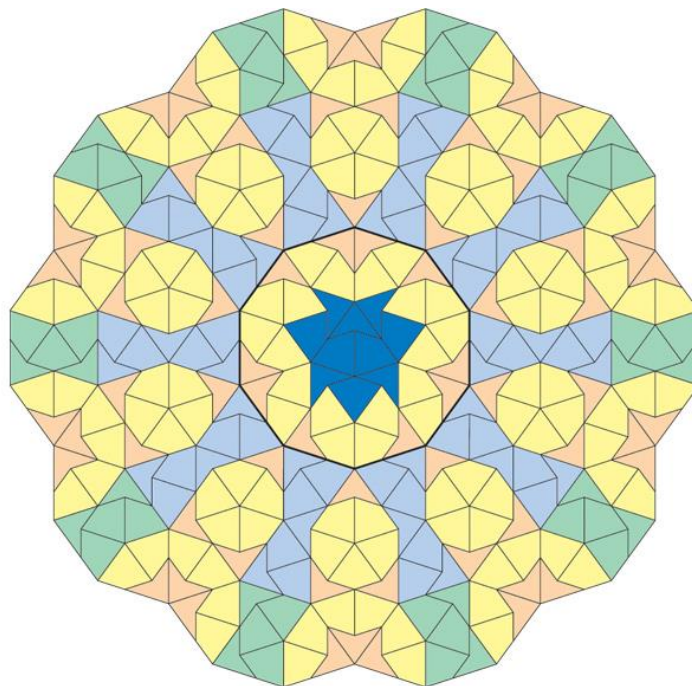
**Slika 10.** Oblici kojima je moguće započeti Penroseov uzorak [10]

Postoji sedam načina na koje je moguće početi slagati pločice oko nekog vrha (Slika 10). Ukoliko slaganje započnemo „suncem“ (engl. *sun*), uzorak s pet zmajeva koji se spajaju u jednom vrhu, dobit ćemo uzorak sa simetrijom petog reda. Drugi oblik koji također daje simetriju petog reda je „zvijezda“ (engl. *star*). Sunce i zvijezda jedini su Penroseovi uzorci sa savršenom simetrijom petog reda te su ekvivalentni što znači da inflacijom ili deflacijom jednog ili drugog uzorka dobiva se onaj drugi. Na Slici 11 prikazani su sunce i zvijezda.



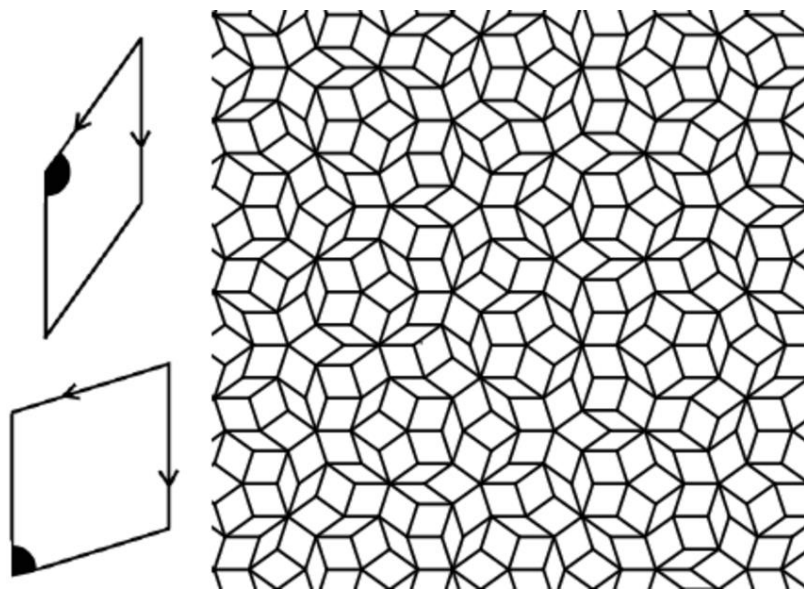
**Slika 11.** Sunce (lijevo) i zvijezda (desno) [11]

Najbitniji uzorak za razumijevanje Penroseovih pločica je tzv. „uzorak beskonačnog kotača“ (engl. *infinite cartwheel pattern*, Slika 12). Kotačem se naziva dio označen crnom crtom, a središte je načinjeno od pravilnih deseterokuta te se svaka točka u uzorku nalazi unutar kotača točno poput ovog koji je prikazan. Deset svijetloplavih pločica nazivaju se „crvi“ (engl. *worms*), a napravljene su od dugih i kratkih „leptir-mašna“ te je broj dugih u zlatnom omjeru prema broju kratkih leptir-mašni. Osim središta uzorka, ostatak pokazuje savršenu simetriju desetog reda, te se dolazi do izmjene uzoraka sunca i zvijezde. U ovom uzorku postoji ukupno  $2^{10}=1024$  stanja, a uklanjanjem mogućnosti rotacije i refleksije ostaju ukupno 62 različite kombinacije. Svaka kombinacija pločica unutar kotača ostavlja područje koje se naziva „decapod“. Svaki decapod sastoji se od 10 jednakih jednakokračnih trokuta oblika uvećanih polovičnih strijela.



**Slika 12.** Uzorak beskonačnog kotača [12]

Rastavljanjem strijela i zmajeva na manje dijelove te njihovim ponovnim sastavljanjem na druge načine moguće je dobiti nove parove pločica koje imaju slična svojstva početnim pločicama. Na ovaj način Penrose je pronašao par pločica koji se sastoji od dva romba sa svim rubovima jednakih dužina. Veći romb ima kutove  $72^\circ$  i  $10^\circ$  dok onaj manji ima  $36^\circ$  i  $144^\circ$  te je dobiveni uzorak prikazan na Slici 13. Površina i broj komada od svake vrste potrebnih za popločavanje su u zlatnom omjeru. Ovakvi uzorci postavljaju se na ravninu na nebrojivu beskonačnost neperiodičnih načina [13].



**Slika 13.** Popločavanje Penroseovim rombovima [14]

Kod Penroseovog popločavanja vrijedi teorem lokalnog izomorfizma, što znači da ukoliko odaberemo neki konačni dio niza, možemo pronaći njegov duplikat ne toliko daleko od njega. Slučaj u kojem neće doći ponavljanja nekog uzorka javlja se ako se uzme niz koji je beskonačan. Ako odaberemo višekratnike zlatnog reza ( $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ) te ih zaokružimo na najbliži cijeli broj dobivamo niz: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 50... Ako zaokružimo višekratnike kvadrata zlatnog reza dobivamo niz: 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23..., te se te dvije sekvence nazivaju komplementarnima. Zajedno pokazuju svaki cijeli pozitivan broj samo jednom. Uzastopni višekratnici bilo kojeg stvarnog broja  $a$ , zaokruženi na najbliži cijeli broj tvore niz pod nazivom spektar  $a$  [13].

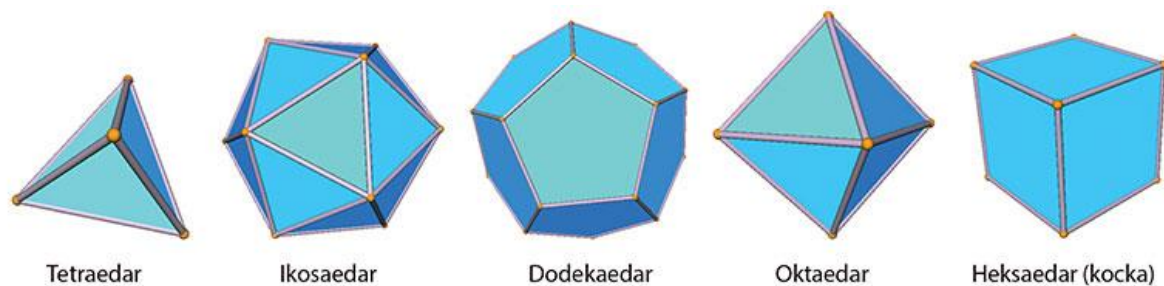
Jedan od najvećih matematičara srednjeg vijeka, Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci, otkrio je neobičan matematički niz koji danas nosi njegovo ime. Fibonaccijev niz čine brojevi 1,1,2,3,5,8,13,21,... pri čemu se svaki sljedeći broj računa kao zbroj prethodnih dvaju u nizu. Elementi Fibonaccijeva niza nazivaju se i Fibonaccijevi brojevi [15]. Penroseovo popločavanje u vezi je s

Fibonaccijevim nizom. Penroseove pločice međusobno su slične, tako da inflacijom ili deflacijom tvore novu pločicu, a slična ovakva svojstva ima i Fibonaccijev niz. Uzme li se dio Fibonaccijeva niza te se svaki slijedeći broj podijeli s prethodnim, dobiveni brojevi težit će broju  $\varphi$  ( $\varphi = 1.618\dots$ ):  $\frac{5}{3} = 1.67$ ,  $\frac{8}{5} = 1.6$ ,  $\frac{13}{8} = 1.63$ ,... Fibonaccijev niz nije rijetka pojava u prirodi te mnoge biljke i životinje pokazuju svojstva ovog niza. Primjer Fibonaccijevog niza u prirodi je suncokret čije sjemenke u središtu rastu u spiralu te pribrajanjem spirala dobit će se Fibonaccijev broj. Čak i ljudsko tijelo se sastoji od Fibonaccijevih brojeva 1, 2, 3 i 5: jedan nos, dva oka, tri segmenta svakog uda te pet prstiju.

Prilikom popločavanja Penroseovim pločicama potrebno je poštivati određena pravila te je omjer njihova pojavljivanja u popločavanju jednak zlatnom omjeru. Penroseov rad na istraživanjima neperiodičnih popločavanja doprinosi razvoju kristalografije. Njegova nagađanja o kristalima, čak i njegova terminologija, pokazala su se nevjerojatno proročanskim. Početkom osamdesetih godina brojni znanstvenici i matematičari počeli su oprezno nagađati o mogućnosti da se atomska struktura kristala temelji na neperiodičnoj rešetki [13].

### 3. Struktura kvazikristala

Do početka osamdesetih godina vjerovalo se da je struktura čvrstih tvari kristalna, odnosno periodična te oni pokazuju rotacijske simetrije drugog, trećeg, četvrtog ili šestog reda. Rešetke dotada poznatih kristala proizlaze iz tri Platonova tijela (Slika 14), odnosno poliedara kojima su strane međusobno jednaki mnogokuti, a to su tetraedar, kocka i oktaedar. U Platonova tijela još spadaju i dodekaedar te ikosaedar, no oni su isključeni zbog peterostruke simetrije koja onemogućava periodično popločavanje. Ikosaedarska struktura otkrivena je kod metalne krutine Al-14-at. %-Mn. Ako se uzorak zaokrene kroz kutove neke točke elektronska difrakcija odabranog područja jasno prikazuje šest petostrukih, deset trostrukih i petnaest dvostrukih osi karakterističnih za ikosaedarsku simetriju [16].



*Slika 14.* Platonova tijela [17]

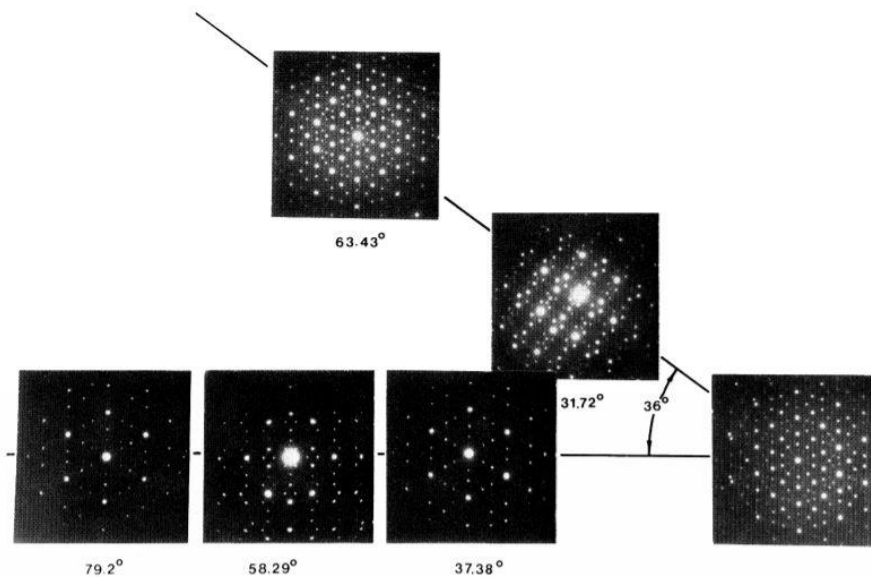
#### 3.1. Difrakcija i otkriće kvazikristala

Do difrakcije svjetlosti dolazi zakretanjem svjetlosnih valova prilikom nailaženja na prepreku. S obzirom da val dolazi i s jedne i druge strane prepreke doći će do njihove međusobne interferencije. Postoje različite vrste svjetlosne difrakcije, a pri proučavanju kristalnih struktura najčešće se koristi Rentgenska difrakcija. Max von Laue, primjenom Rentgenske difrakcije, dokazuje da se većina čvrstih materijala nalazi u kristalnom stanju te se njihova unutarnja struktura ne mora odražavati i na vanjski izgled [18]. Kristalni uzorci djeluju kao optička rešetka za rentgensko zračenje, zbog male valne duljine zraka, te ukoliko zrake vidljive svjetlosti padnu na optičku rešetku dolazi do njene difrakcije. William Bragg objašnjava difrakciju pomoću jednadžbe poznate kao Braggov zakon:

$$n\lambda = 2d_{hkl}\sin\theta, \quad (2.8)$$

gdje je  $\lambda$  valna duljina,  $\theta$  kut reflektirane svjetlosti i  $d_{hkl}$  udaljenost ravnina.

Otkriće kvazikristala pripisuje se Danielu Shechtmanu. Shechtman je proučavao difrakcijske uzorke koji nastaju kada se x-zrake puštaju kroz kristale te pri tome otkrio uzorke koji nemaju periodične strukture. Shechtman i njegovi kolege miješali su aluminij i mangan u otprilike omjeru šest prema jedan; zatim su zagrijali smjesu i, nakon što se otopila, brzo je ohladili natrag u kruto stanje. Shechtman je, koristeći elektronski mikroskop, otkrio da stvrdnuta legura pokazuje peterostruku odnosno ikosaedarsku simetriju, odnosno zaokretanjem za  $72^\circ$  ( $360^\circ/5$ ) reproducirana je ista struktura. Takva se simetrija smatrala nemogućom u kristalima jer nije mogla pružiti osnovu ponavljajuće se pravilne strukture te je ona neperiodična u svim smjerovima. Na Slici 15 prikazan je difrakcijski uzorak dobiven iz kristala ikosaedarske strukture. U kvazikristalima javlja se i dodekaedarska struktura. Ako ohladimo talinu od bakra, aluminija i željeza, ona će očvrsnuti u zrno oblika dodekaedra, geometrijske krutine čije strane čini 12 pravilnih peterokuta. Kristali su sastavljeni od identičnih građevnih jedinica, koje nazivamo jediničnim ćelijama, sa istim rasporedom atoma između susjednih ćelija. Dodekaedarsku strukturu nije moguće sastaviti pomoću atoma u jediničnoj ćeliji korištenjem jednog oblika što znači da je ovakva struktura zapravo kvazikristalna [19].



**Slika 15.** Difrakcijski uzorci dobiveni iz jednog zrna ikosaedarske strukture [16]

Svaka kristalična tvar ima svoj karakteristični difraktogram. Difraktogrami su dijagrami koji prikazuju ovisnost intenziteta difraktiranog zračenja o difrakcijskom kutu  $\theta$ . Na difraktogramu se nalaze difrakcijski maksimumi koji govore o smještaju atoma ili iona u kristalu te vrsti kristalne ćelije. Difrakcijski maksimumi mogu se opisati linearnom kombinacijom jediničnih vektora. Trodimenzionalne pravilne kristale je moguće definirati pomoću tri vektora  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  i  $\vec{a}_3$  te primjenom vektora oblika

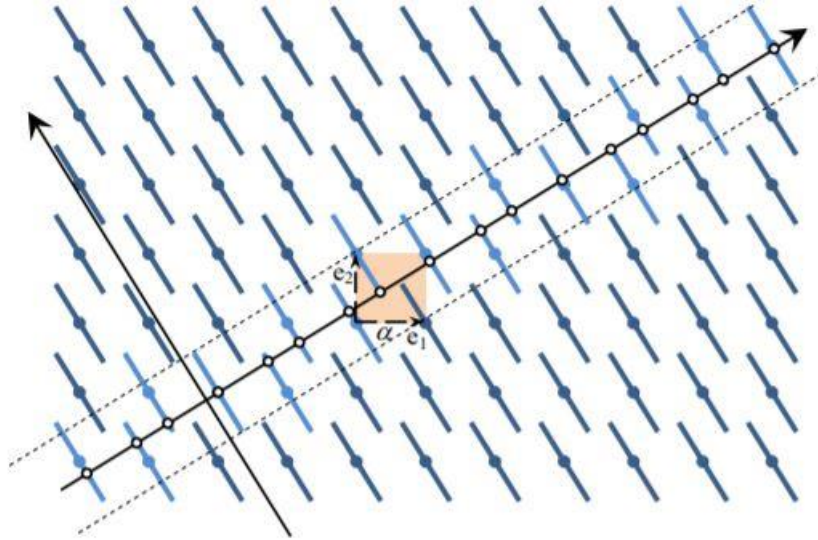
$$\vec{R} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3, \quad (2.9)$$

moguće je izgraditi cijeli kristal. Translacijom kristala za taj vektor on prelazi u samog sebe što dokazuje njegovu translacijsku simetriju. Kod opisivanja kvazikristala to je malo složenije jer postoje nedopuštene simetrije koje nije moguće opisati sa tri vektora, već ih je potrebno definirati minimalno pet. S obzirom na složenost strukture kvazikristala, za njen opis najčešće se koriste dvije metode. Prva metoda je višedimenzionalna analiza. Kako je ikosaedarska struktura dopuštena u šesterodimenzionalnom prostoru, na nju se primjenjuje projekcijska matrica

$$M = (\tau^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

koja služi za projekciju hiperkocke u šesterodimenzionalnom prostoru na trodimenzionalni prostor. Druga metoda temelji se na traženju geometrijskih likova kojima je moguće popuniti prostor, odnosno neperiodičnom popločavanju prostora na način da se dobije kvazikristal. Dobivena struktura uspoređuje se sa podacima dobivenim mikroskopom. Obično se koristi kombinacija objiju metoda kako bi se dobila difrakcijska slika. U formuli (2.10),  $\tau$  predstavlja zlatni omjer, a on se javlja kod simetrija petog reda kao omjer dijagonale i stranice peterokuta. Na Slici 16 prikazan je primjer jednodimenzionalnog Fibonaccijeveg niza dobivenog projekcijom dvodimenzionalne kubične rešetke.

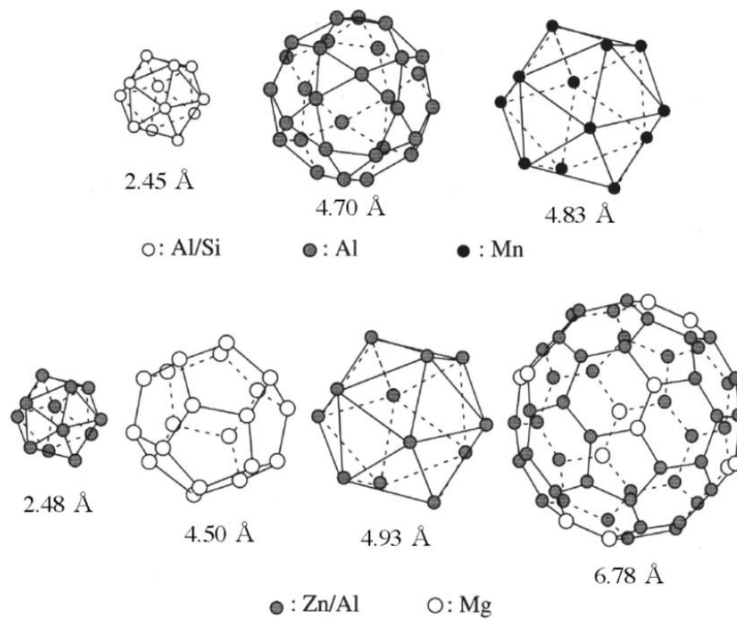




**Slika 16.** Primjer jednodimenzionalnog Fibonaccijevog/kvaziperiodičnog niza dobivenog projekcijom dvodimenzionalne kubične rešetke [20]

Kvazikristale moguće je razumijeti primjenjujući Penroseovo popločavanje s dvodimenzionalnog prostora na trodimenzionalni koristeći romboedar s tupim i oštrim kutom te poštivajući njihova pravila slaganja. Oba romboedra pojavljuju se u zlatnom omjeru jedan na prema drugom, a dobivena struktura je ikosaedarska. Ikosaedarsku strukturu čini 30 dvostrukih, 20 trostrukih i 12 peterostrukih osi simetrije. Ova struktura je iznimno stabilna i temelj je izgradnje geodetskih kupola Buckminstera Fullera, ali je i karakteristična za mnoge viruse (npr. polio virus) što ih čini tako neuništivima. Ikosaedarska struktura javlja se u metalnim legurama, a pogotovo u onima koje sadrže aluminij sa bakrom, manganom, željezom itd., [18]. Najčešći tipovi ikosaedarskih kvazikristala koji se javljaju su tzv. Mackayevi i Bergmanovi grozdovi, a obje vrste sastoje se od više slojeva ikosaedarske i dodekaedarske strukture (Slika 17).

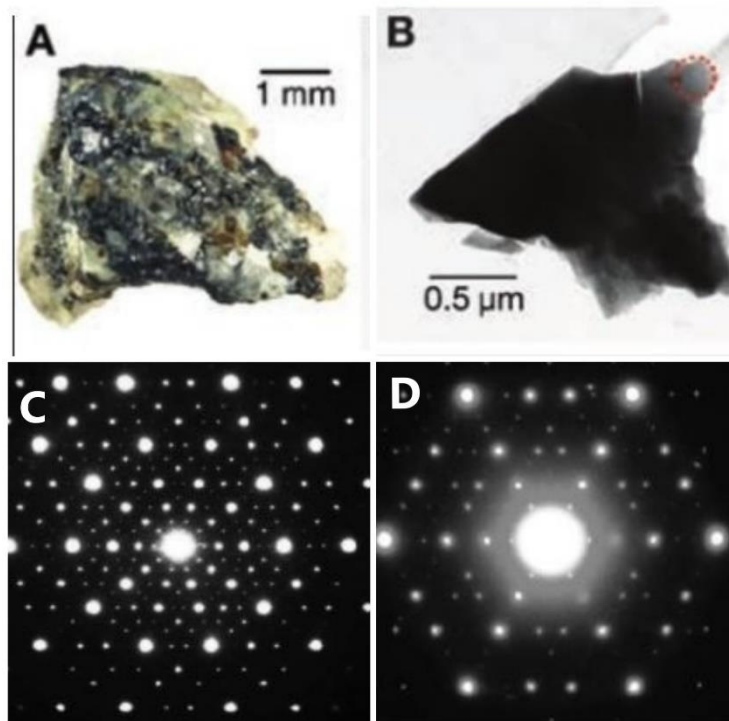




**Slika 17.** Mackayev (gore) i Bergmanov (dolje) tip grozda [21]

### 3.2. Kvazikristali u prirodi

Većina dosad poznatih kvazikristala dobivena je u laboratorijima hlađenjem talina metalnih legura. Prvi prirodni kvazikristal (Slika 18) pronađen je u rijeci Khatyrki u jugoistočnoj Rusiji, a uzorak je pohranjen u muzeju u Firenzi [22]. Ikosahedrit, mineral formule  $\text{Al}_{63}\text{Cu}_{24}\text{Fe}_{13}$ , posjeduje zabranjenu ikosaedarsku strukturu te uključuje šest nezavisnih osi peterostruke simetrije. Sastav ovog kvazikristala sličan je sastavu onih dobivenih u laboratorijima. Istraživanja pokazuju da ovaj mineral vrlo vjerojatno nije nastao na Zemlji već je na nju dospio u obliku meteorita.



**Slika 18.** (A) izvorni uzorak khatyrkita korišten u istraživanju, svjetliji dio sadrži mješavinu magnezijevog aluminata, augita i olivina, tamniji dio se većim dijelom sastoji od khatyrkita ( $\text{CuAl}_2$ ) i kupalita ( $\text{CuAl}$ ), ali sadrži i granule prikazane na slici (B), (C) i (D) su difrakcijski uzorci dobiveni iz prirodnog kvazikristala iz dijela zaokruženog crvenom bojom na (B) [22]

## ZAKLJUČAK

Penroseovo popločavanje je neperiodično popločavanje prostora pomoću rombova čiji kutovi su višekratnici broja 36, a njihovi omjeri stranica odgovaraju broju  $\varphi$ , odnosno zlatnom omjeru. Penroseovo popločavanje pridonosi razvoju kristalografije te razumijevanju kvazikristalnih struktura. Strukture kvazikristala koje se javljaju su ikosaedarska i dodekaedarska, a ovakve strukture posjeduju nedopuštene simetrije kao što je simetrija petog reda gdje se zaokretanjem za kut  $72^\circ$  reproducira ista struktura. Kod svih simetrija petog reda dijagonala i stranica peterokuta javljaju se u zlatnom omjeru,  $\varphi$ . Kvazikristali su legure dvaju ili više metala, najčešće na bazi aluminijska, a njihova fizikalna svojstva razlikuju se od samih elemenata od kojih su građeni. Vrlo su otporni na oštećenja kao što je korozija, a ikosaedarska struktura pruža im vrlo visoku čvrstoću. Kvazikristali su i danas zanimljiv predmet istraživanja, a dosad ih je u prirodi pronađeno tek nekoliko.

## LITERATURA

- [1] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2020/summary/> (pristup 14. svibnja 2021.)
- [2] Penrose R., Gravitational Collapse and Space-Time Singularities, *Phys. Rev. Lett.*, **14** (1965), 57-59
- [3] <https://im-possible.info/english/articles/penrose-bio/penrose-bio.html> (pristup 14. svibnja 2021.)
- [4] Stilinović V., Brückler F.M., Kvazikristali – otkriće, struktura i svojstva, *Kem. Ind.*, **61** (2012), 351
- [5] Krulić, K., Popločavanje ravnine, *math.e*, 7 (2006)
- [6] <https://secure.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-02b/projects/schweber/penrose.html> (pristup 24. lipnja 2021.)
- [7] <https://intendo.net/penrose/info.html> (pristup 18. srpnja 2021.)
- [8] [http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680fa05/schultz/penrose/penrose\\_main.html](http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680fa05/schultz/penrose/penrose_main.html) (pristup 18. srpnja 2021.)
- [9] <https://mathsbyagirl.wordpress.com/tag/penrose> (pristup 18. srpnja 2021.)
- [10] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose\\_vertex\\_figures.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_vertex_figures.svg) (pristup 20. srpnja 2021.)
- [11] <https://mathworld.wolfram.com/PenroseTiles.html> (pristup 21. srpnja 2021.)
- [12] <https://twitter.com/robathauerart/status/1249346483398139915> (pristup 21. srpnja 2021.)
- [13] Gardner, M., Penrose tiles to trapdoor ciphers and the return of Dr. Matrix, Math. Assoc. of America, Washington D.C., 1997, 5-25
- [14] [https://www.researchgate.net/figure/In-the-left-there-are-the-two-basic-rhombuses-of-the-Penrose-tiling-the-thin-in-the\\_fig1\\_30514270](https://www.researchgate.net/figure/In-the-left-there-are-the-two-basic-rhombuses-of-the-Penrose-tiling-the-thin-in-the_fig1_30514270) (pristup 26. srpnja 2021.)
- [15] [http://e.math.hr/math\\_e\\_article/br16/jukic\\_velic](http://e.math.hr/math_e_article/br16/jukic_velic) (pristup 25. srpnja 2021.)

[16] Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D., Cahn, J. W., Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry, *Phys. Rev. Lett.*, **53** (1984), 1951-1953

[17] <https://nova-akropola.com/znanost-i-priroda/znanost/platonova-tijela/> (pristup 12. kolovoza 2021.)

[18] Hammond C., The Basic of Crystallography and Diffraction, International Union of Crystallography, Book series, Oxford University Press, 1998., 129-201

[19] Stephens P.W., Goldman A. I., The Structure of Quasicrystals, *Scientific American*, 264 (1991), 44-53

[20] Popčević P., Anizotropija transportnih svojstava aproksimantna dekalgonalnih kvazikristala, doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2010

[21] [https://www.researchgate.net/figure/Local-structural-units-included-in-quasicrystals-a-Tsai-type-b-Mackay-type-and-c\\_fig1\\_281114552](https://www.researchgate.net/figure/Local-structural-units-included-in-quasicrystals-a-Tsai-type-b-Mackay-type-and-c_fig1_281114552) (pristup 25. kolovoza 2021.)

[22] Bindi L., Steinhardt P.J., Yao N., Lu P.J., Natural quasicrystals, *Science*, **32** (2009), 1306-1309