Kontinuirane slučajne varijable i primjene

Jelušić, Nika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
SVEUČILIŠNI PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ

Nika Jelušić

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, srpanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Kandidatkinja **Nika Jelušić**

Predala je izrađen završni rad dana: 8. srpnja 2024.

Povjerenstvo u sastavu:

izv. prof. dr. sc. Erna Begović Kovač, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
doc. dr. sc. Miroslav Jerković, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
doc. dr. sc. Iva Movre Šapić, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
doc. dr. sc. Andrej Vidak, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije (zamjena)

povoljno je ocijenilo završni rad i odobrilo obranu završnog rada pred povjerenstvom u istom sastavu.

Završni ispit održat će se dana: 11. srpnja 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

SVEUČILIŠNI PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ

Nika Jelušić

KONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE I PRIMJENE

ZAVRŠNI RAD

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Erna Begović Kovač, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

Članovi povjerenstva:

1. izv. prof. dr. sc. Erna Begović Kovač, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

2. doc. dr. sc. Miroslav Jerković, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

3. doc. dr. sc. Iva Movre Šapić, Sveučilište u Zagrebu Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

Zagreb, srpanj 2024.

SAŽETAK RADA

Ovaj završni rad istražuje ključne aspekte kontinuiranih slučajnih varijabli i njihove primjene u statistici i inženjerstvu. Fokus je stavljen na analizu normalne distribucije, funkcije gustoće i distribucije vjerojatnosti te njihovu primjenu u različitim kontekstima. Osim toga, rad se bavi eksponencijalnom i beta distribucijom, objašnjavajući njihove karakteristike i praktične primjere uporabe. Posebna pažnja posvećena je primjeni ovih distribucija kroz konkretne primjere, čime se ilustrira njihova upotreba u stvarnim situacijama. Kroz detaljnu analizu i grafičke prikaze, rad doprinosi dubljem razumijevanju i korištenju ovih statističkih metoda.

SUMMARY

This thesis explores the key aspects of continuous random variables and their applications in statistics and engineering. The focus is on the analysis of normal distribution, probability density, and distribution functions, along with their applications in various contexts. Additionally, the thesis covers the exponential and beta distributions, explaining their characteristics and practical examples of usage. Special attention is given to the practical applications of these distributions through specific examples, illustrating their use in real-world situations. Through detailed analysis and graphical representations, the thesis contributes to a deeper understanding and utilization of these statistical methods.

Sadržaj

1. UVOD

Kontinuirane slučajne varijable su od izuzetnog značaja u statistici i inženjerstvu jer omogućuju modeliranje i analizu podataka koji se ne ograničavaju na određene vrijednosti, već mogu poprimiti bilo koju vrijednost unutar određenog intervala. Za razliku od diskretnih slučajnih varijabli, koje su ograničene na specifične vrijednosti, kontinuirane slučajne varijable poprimaju sve realne vrijednosti iz nekog intervala te time omogućuju detaljniju i precizniju analizu podataka, što je esencijalno u mnogim znanstvenim i inženjerskim disciplinama.

Jedna od najvažnijih kontinuiranih distribucija je normalna distribucija, poznata i kao Gaussova distribucija. Ona je karakterizirana svojim zvonolikim oblikom krivulje i definirana srednjom vrijednosti (μ) i standardnom devijacijom (σ). Zbog svojih jedinstvenih svojstava, normalna distribucija koristi se za modeliranje mnogih prirodnih i društvenih fenomena, uključujući visinu ljudi, rezultate ispitivanja i financijske prinose.

Pored normalne distribucije, ovaj rad analizira i eksponencijalnu te beta distribuciju. Eksponencijalna distribucija koristi se za modeliranje vremena između događaja u Poissonovom procesu, što je korisno u područjima kao što su telekomunikacije, biologija i teorija čekanja. S druge strane, beta distribucija omogućuje modeliranje varijabli koje su ograničene na određeni interval, što je praktično za analizu proporcija i vjerodostojnosti.

Ovaj rad također detaljno istražuje Studentovu t-distribuciju i hi-kvadrat distribuciju. Studentova t-distribucija je posebno korisna za procjenu srednjih vrijednosti malih uzoraka kada standardna devijacija populacije nije poznata, dok se hi-kvadrat distribucija koristi za testiranje hipoteza o varijancama i analizu varijance.

Cilj rada je pružiti sveobuhvatan pregled kontinuiranih slučajnih varijabli i njihovih distribucija te prikazati njihovu praktičnu primjenu kroz konkretne primjere i grafičke prikaze. Analizom ovih distribucija rad doprinosi dubljem razumijevanju statističkih metoda i njihovoj primjeni u različitim znanstvenim i inženjerskim disciplinama. Ova analiza je od ključne važnosti za istraživače i inženjere koji se bave obradom i interpretacijom podataka, jer omogućuje donošenje informiranih odluka temeljenih na statističkim analizama.

2. KONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE

2.1 DEFINICIJA

Slučajna varijabla je funkcija koja svakom ishodu nekog slučajnog pokusa pridružuje neki realni broj. Slučajne varijable označavaju se velikim tiskanim slovom, npr. X. Kontinuirana slučajna varijabla može poprimiti bilo koju realnu vrijednost unutar određenog intervala. Za razliku od diskretnih slučajnih varijabli, koje mogu imati samo određene, odvojene vrijednosti, kontinuirane slučajne varijable imaju kontinuirani skup mogućih vrijednosti. Općenito, slučajna varijabla se smatra kontinuiranom ako su ispunjena oba sljedeća uvjeta.

1. Skup mogućih vrijednosti čine svi brojevi unutar određenog intervala na brojevnoj osi (moguće beskonačnog opsega, npr., od $-\infty$ do ∞) ili svi brojevi u disjunktnoj uniji takvih intervala (npr., $[0,10]\cup[20,30]$).

2. Niti jedna moguća vrijednost varijable nema pozitivnu vjerojatnost, tj., $P(X=c)=0$ za bilo koju moguću vrijednost c.

2.2 FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

Funkcija gustoće vjerojatnosti opisuje kako su vjerojatnosti raspoređene po skupu mogućih vrijednosti. Označena s $f(x)$, ova funkcija pruža informacije o tome kolika je vjerojatnost da će se kontinuirana slučajna varijabla nalaziti unutar nekog intervala $[a, b]$. Sama funkcija gustoće vjerojatnosti ne daje vjerojatnosti pojedinih točaka, jer je za kontinuirane varijable $P(X=c)=0$ za bilo koju točku c, [3].

Kako bi funkcija gustoće vjerojatnosti bila valjana, mora zadovoljiti dva uvjeta.

1. Funkcija gustoće mora biti nenegativna za sve vrijednosti x,
$$f(x) \geq 0 \text{ za sve } x.$$
2. Integral funkcije gustoće vjerojatnosti preko cijele domene mora biti jednak jedan
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Svi probabilistički izrazi o slučajnoj varijabli X mogu se izraziti pomoću $f(x)$. Na primjer, za bilo koji interval $[a,b]$ vrijedi

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ako postavimo $a=b$, tada je

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0,$$

što se podudara sa zahtjevom da je vjerojatnost u svakoj pojedinoj točki jednaka nula.

2.3 FUNKCIJA DISTRIBUCIJE VJEROJATNOSTI

Funkcija distribucije vjerojatnosti, označena kao $F(x)$, opisuje vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost manju ili jednaku x i definira se kao

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkcija distribucije vjerojatnosti neprekidna je i monotono rastuća funkcija koja ima limes 1 kada x teži beskonačnosti, a 0 kada x teži u minus beskonačno, [3].

Može se koristiti za odgovaranje na sve vjerojatnosne upite vezane uz X. Na primjer, za bilo koji interval $[a,b]$, vjerojatnost da će X biti unutar tog intervala može se izračunati kao

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Odnos između funkcije distribucije vjerojatnosti F i funkcije gustoće vjerojatnosti f izražava se kao

$$F(a) = P\{X \in (-\infty, a]\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

Derivacijom funkcije F dobivamo

$$F'(a) = f(a).$$

Također, integral

$$f(x)dx = F(x) + c$$

za realnu konstantu c. Stoga je F primitivna funkcija funkcije f.

2.4 OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

Očekivanje ili matematička očekivana vrijednost kontinuirane slučajne varijable, često označeno kao $E(X)$, predstavlja srednju vrijednost svih mogućih vrijednosti koje varijabla može poprimiti, određenu prema njihovim vjerojatnostima. Očekivanje je ključno za razumijevanje prosječnog ponašanja slučajne varijable i koristi se u mnogim statističkim analizama.

Za kontinuiranu slučajnu varijablu X s funkcijom gustoće vjerojatnosti $f(x)$, očekivanje je definirano kao

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Navedeni izraz predstavlja sumu svih mogućih vrijednosti x, svaku određenu njezinom gustoćom vjerojatnosti $f(x)$, [1].

Očekivanje je linearno, što znači da za bilo koje dvije slučajne varijable X i Y, te konstante a i b, vrijedi

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Ako je c konstanta, tada je

$$E(c) = c.$$

Ukoliko je $g(X)$ funkcija slučajne varijable X, tada je očekivanje $g(X)$ definirano kao

$$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

2.5 VARIJANCA

Varijanca je mjera raspršenosti ili raznolikosti vrijednosti slučajne varijable oko njezine očekivane vrijednosti, tj. srednje vrijednosti. Dok očekivanje pruža informaciju o prosječnoj vrijednosti slučajne varijable, varijanca pokazuje koliko su te vrijednosti raširene ili raspoređene.

Za kontinuiranu slučajnu varijablu X s funkcijom gustoće vjerojatnosti $f(x)$ i očekivanjem $E(X)=\mu$, varijanca je definirana kao

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx.$$

Varijanca se može shvatiti kao očekivanje kvadrata odstupanja vrijednosti X od njezine srednje vrijednosti μ. Ova mjera daje informaciju o tome koliko su pojedinačne vrijednosti slučajne varijable udaljene od srednje vrijednosti, [3].

Druga formula za varijancu koje se često koristi, a može se izvesti iz prve je

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Varijanca je uvijek nenegativna. To se vidi iz njene definicije jer je kvadrat bilo koje vrijednosti x-μ nenegativan, f je nenegativna jer je funkcija gustoće vjerojatnosti, a integral nenegativne funkcije je također nenegativan. Stoga zaključujemo da je

$$Var(X) \geq 0.$$

Vrijedi li da je c konstanta, tada je varijanca konstante jednaka 0,

$$Var(c) = 0.$$

Ako su a i b konstante, tada je varijanca linearne transformacije aX+b prikazana izrazom

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, tada je varijanca njihove sume jednaka

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

2.6 STANDARDNA DEVIJACIJA

Slično kao i varijanca, standardna devijacija mjera je raspršenosti ili varijabilnosti vrijednosti slučajne varijable oko njezine očekivane vrijednosti tj. srednje vrijednosti. Ona predstavlja prosječnu udaljenost vrijednosti varijable od srednje vrijednosti i izražava se u istim jedinicama kao i sama varijabla, što je čini intuitivnijom za interpretaciju u usporedbi s varijacijom.

Standardna devijacija koristi se za mjerenje raspršenosti podataka. Veća standardna devijacija ukazuje na veću raspršenost vrijednosti oko srednje vrijednosti, dok manja standardna devijacija ukazuje na manju raspršenost, [2].

Za kontinuiranu slučajnu varijablu X s funkcijom gustoće vjerojatnosti $f(x)$ i očekivanjem $E(X)=\mu$, standardna devijacija, označena sa $\sigma(X)$ ili jednostavno σ, definira se kao pozitivan kvadratni korijen varijance $Var(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}.$$

Ukoliko je c konstanta, tada je standardna devijacija konstante 0

$$\sigma(c) = 0.$$

Ako je a konstanta, tada je standardna devijacija linearnog skaliranja varijable aX dana izrazom

$$\sigma(aX) = |a|\sigma(X).$$

3. NORMALNA DISTRIBUCIJA

3.1 DEFINICJA

Normalna slučajna varijabla je kontinuirana slučajna varijabla koja slijedi normalnu distribuciju, poznatu i kao Gaussova distribucija. Ova distribucija je važna zbog svoje učestale pojave u primjenama i jedinstvenih matematičkih svojstava. Mnogi fenomeni u prirodi, industriji i ekonomiji su približno normalno distribuirani. Na primjer, visine ljudi, rezultati testova, greške u mjerenju i mnogi drugi tipovi podataka teže tvoriti zvonoliku krivulju normalne distribucije kada se prikažu grafički.

Normalna distribucija je važna jer omogućava primjenu statističkih metoda koje zahtijevaju pretpostavku normalnosti, kao što su intervali povjerenja i testovi hipoteza. Osim toga, centralni granični teorem kaže da će zbroj velikog broja nezavisnih, identično distribuiranih varijabli biti približno normalno distribuiran, bez obzira na izvornu distribuciju varijabli. Posljedica centralnog graničnog teorema je da čak i kada originalni podatci nisu normalno distribuirani, ako imamo dovoljno mnogo podataka, s njima možemo računati kao da imaju normalnu distribuciju.

Za kontinuiranu slučajnu varijablu *X* se kaže da ima normalnu distribuciju sa parametrima μ i σ (ili μ i σ^2), gdje $-\infty < \mu < \infty$ i $0 < \sigma$, ukoliko je funkcija gustoće vjerojatnosti od *X*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad -\infty < x < \infty.$$

Tada kažemo da je μ očekivanje, a σ standardna devijacija normalno distribuirane slučajne varijable *X*, [3].

Navest ćemo nekoliko primjena normalne slučajne varijable:

1. **Visina ljudi**: Visina ljudi je približno normalno distribuirana te se može koristiti u dizajniranju odjeće, namještaja i drugih proizvoda koji trebaju odgovarati različitim veličinama tijela.

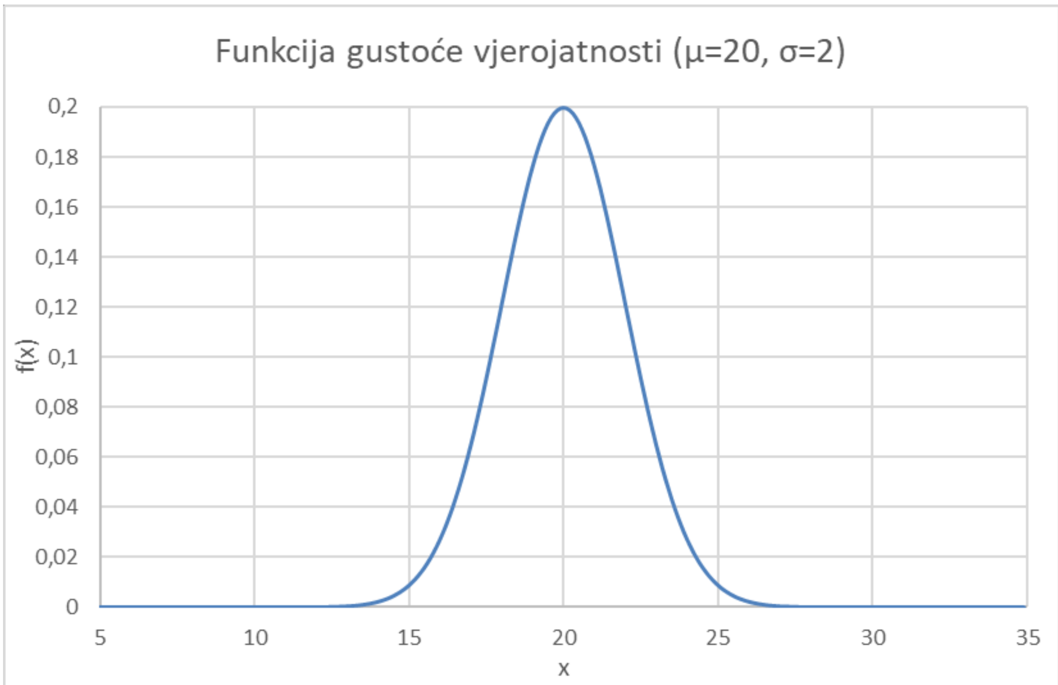
2. **Greške u mjerenju**: Greške u mjerenju zbog ograničenja preciznosti instrumenata često slijede normalnu distribuciju. Ova pretpostavka omogućava analizu grešaka i kontrolu kvalitete.

3. **Rezultati testova**: Rezultati standardiziranih testova često slijede normalnu distribuciju, omogućavajući korištenje percentilnih rangova i drugih statističkih alata za interpretaciju rezultata.

Da bismo detaljnije analizirali normalnu slučajnu varijablu, razmotrit ćemo primjer u kojem je $\mu=20$ i $\sigma=2$ te prikazati funkciju gustoće vjerojatnosti i funkciju distribucije vjerojatnosti. Za potrebe zadatka koristi se Microsoft Excel.

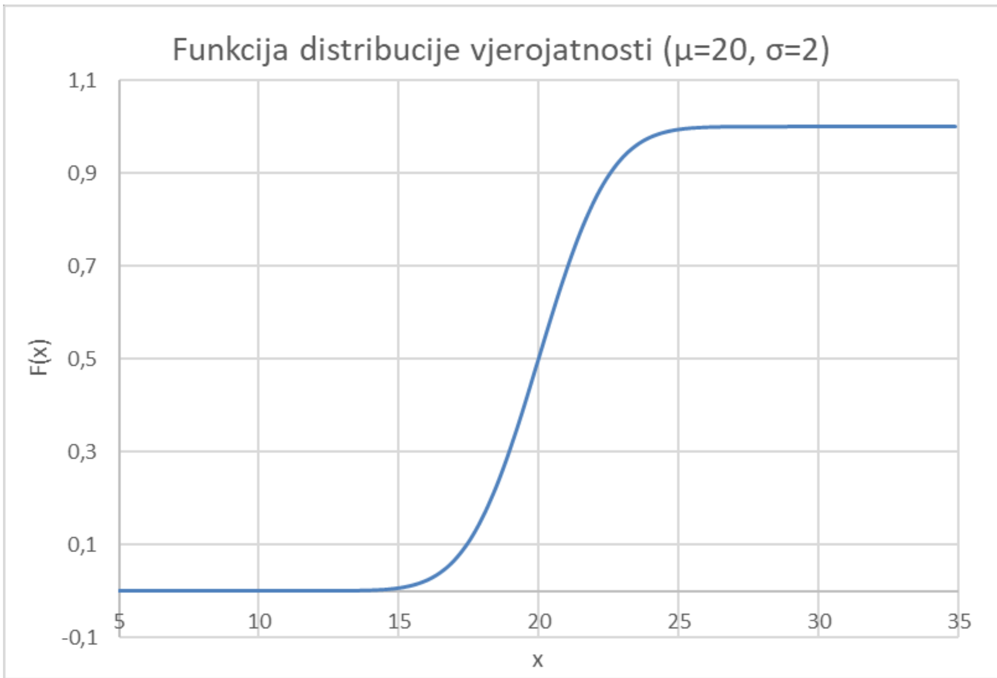
Graf funkcije gustoće vjerojatnosti za navedeni primjer dan je na Slici 1.

Graf ima oblik zvonolike krivulje koja je uska i visoka. Može se uočiti da funkcija raste do srednje vrijednosti (μ), a zatim opada. Brzina rasta i pada ovisi o standardnoj devijaciji. Manja standardna devijacija ($\sigma=2$) znači da su vrijednosti više koncentrirane oko srednje vrijednosti.



Slika 1. Funkcija gustoće vjerojatnosti (μ=20 i σ=2)

Potom pratimo izgled grafičkog prikaza funkcije distribucije vjerojatnosti za navedeni primjer (Slika 2).



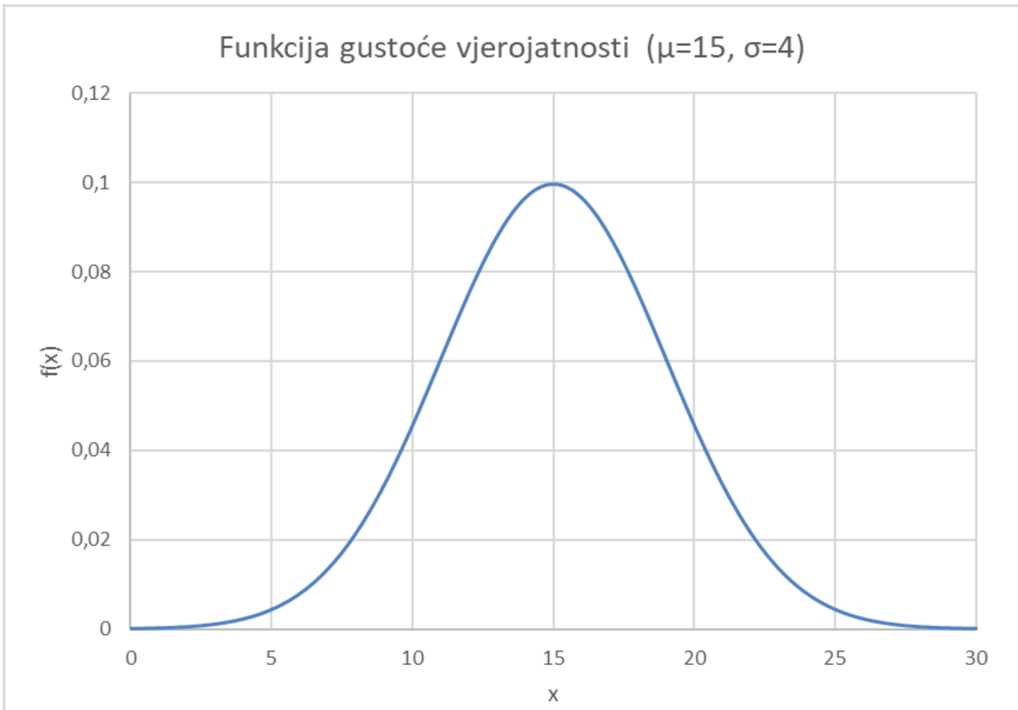
Slika 2. Funkcija distribucije vjerojatnosti (μ=20 i σ=2)

Graf funkcije distribucije vjerojatnosti ima oblik S-krivulje. Već smo naveli da funkcije distribucije vjerojatnosti rastu od 0 do 1, kao što i uočavamo prikazanim te brzi rast za navedeni primjer znači da je većina vrijednosti bliža srednjoj vrijednosti. To je posljedica male vrijednosti σ. Uz to, uočavamo da funkcija F ima vrijednost 0.5 na $x = \mu$.

S druge strane razmotrit ćemo primjer normalne slučajne varijable gdje je $\mu=15$ i $\sigma=4$ te prikazati funkciju gustoće vjerojatnosti i funkciju distribucije vjerojatnosti. Kao i za prvi primjer, za potrebe zadatka koristi se program Microsoft Excel.

Funkcije gustoće vjerojatnosti grafički prikazano izgleda slično prijašnjoj sa pokojim razlikama (Slika 3).

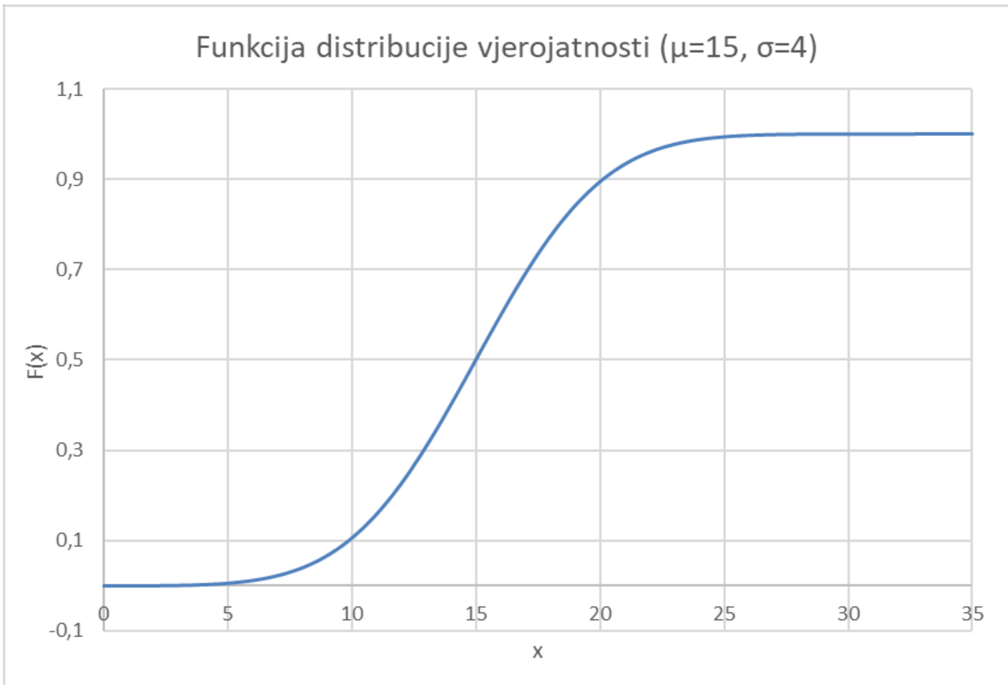
Za navedeni primjer, funkcija također zauzima oblik zvonolike krivulje, no uočavamo da je krivulja šira i niža. Pratimo rast do vrijednosti 15 (maksimuma krivulje) i potom pad. Brzina rasta i pada ovisi o standardnoj devijaciji (σ). Zbog veće standardne devijacije ($\sigma=4$) vrijednosti su više raspršene.



Slika 3. Funkcija gustoće vjerojatnosti ($\mu=15$ i $\sigma=4$)

Još ćemo grafički prikazati funkciju distribucije vjerojatnosti za navedeni primjer (Slika 4).

Možemo uočiti da graf funkcije distribucije vjerojatnosti također zauzima oblik S-krivulje te da F opet ima vrijednost 0.5 za $x=\mu$, što je u ovom slučaju 15. Pratimo rast krivulje od vrijednosti 0 do vrijednosti 1, no možemo zaključiti da dolazi do sporijeg rasta što pokazuje veću raspršenost vrijednosti.



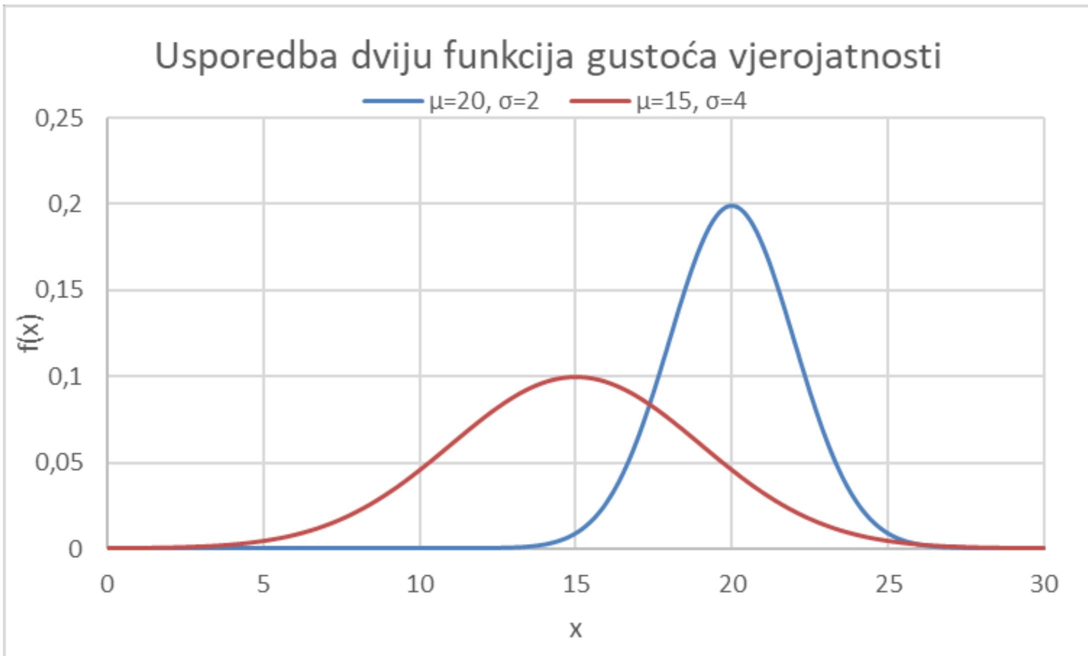
Slika 4. Funkcija distribucije vjerojatnosti (μ=15 i σ=4)

Usporediti ćemo potom funkcije gustoće vjerojatnosti za oba slučaja (Slika 5).

U navedenom prikazu funkcija gustoća vjerojatnosti za prvi primjer pri kojem je $\mu=20$ i $\sigma=2$ te drugi pri kojem je $\mu=15$ i $\sigma=4$ možemo uočiti određene razlike.

Prvo, za krivulju pri $\mu=20$ i $\sigma=2$ možemo primijetiti da je uža i viša, što znači da su vrijednosti više koncentrirane oko srednje vrijednosti. Vrh krivulje (najviša točka) nalazi se na $x=20$, što odgovara srednjoj vrijednosti. Krivulja brzo opada kako se udaljavamo od srednje vrijednosti, što pokazuje da su ekstremne vrijednosti manje vjerojatne.

S druge strane, krivulja pri $\mu=15$ i $\sigma=4$ je šira i niža, što znači da su vrijednosti više raspršene oko srednje vrijednosti. Vrh krivulje nalazi se na $x=15$, što odgovara srednjoj vrijednosti. Krivulja sporije opada kako se udaljavamo od srednje vrijednosti, što pokazuje veću vjerojatnost za ekstremne vrijednosti.



Slika 5. Usporedba dviju funkcija gustoća vjerojatnosti

Iz gornjih prikaza možemo primijetiti da, nakon što se dovoljno udaljimo od srednje vrijednosti, funkcija f poprima vrijednosti jako blizu nule. To koliko se moramo udaljiti od srednje vrijednosti da se f jako približi nuli ovisi o standardnoj devijaciji σ.

Pomoću intervala tri sigme opisuje se raspon vrijednosti oko srednje vrijednosti μ, u kojem se nalazi velika većina (99.7%) podataka u normalnoj distribuciji. On obuhvaća vrijednosti od $\mu-3\sigma$ do $\mu+3\sigma$, gdje je μ očekivanje, tj. srednja vrijednost, a σ standardna devijacija.

U prvom primjeru pri kojem su μ=20 i σ=2, interval tri sigme obuhvaća raspon od

$$20 - 3 \times 2 \leq x \leq 20 + 3 \times 2,$$

$$14 \leq x \leq 26.$$

U drugom primjeru pri kojem su μ=15 i σ=4, interval tri sigme obuhvaća raspon od

$$15 - 3 \times 4 \leq x \leq 15 + 3 \times 4,$$

$$3 \leq x \leq 27.$$

Iz prikazanih grafova funkcija gustoće za ove primjere možemo uočiti da izvan intervala tri sigme vrijednosti funkcije gustoće brzo padaju gotovo na nulu. To ukazuje na vrlo nisku vjerojatnost pojavljivanja vrijednosti izvan ovog raspona.

3.2 STANDARDNA NORMALNA SLUČAJNA VARIJABLA

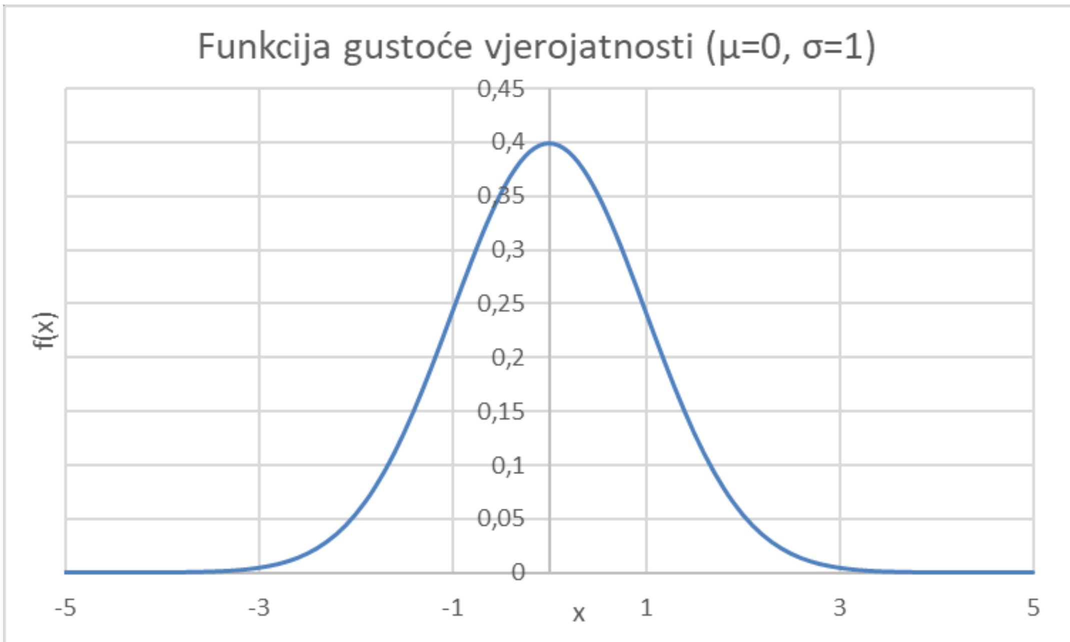
Normalna distribucija s vrijednostima parametara μ=0 i σ=1 naziva se standardna normalna distribucija. Slučajna varijabla koja ima standardnu normalu distribuciju naziva se standardna normalna slučajna varijabla i označava se sa *Z*. Funkcija gustoće vjerojatnosti od *Z* je

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} \qquad -\infty < z < \infty.$$

Ova je funkcija jednostavno izvedena iz funkcije gustoće vjerojatnosti tako što smo uvrstili μ=0 i σ=1, a *x* smo zamijenili sa *z*.

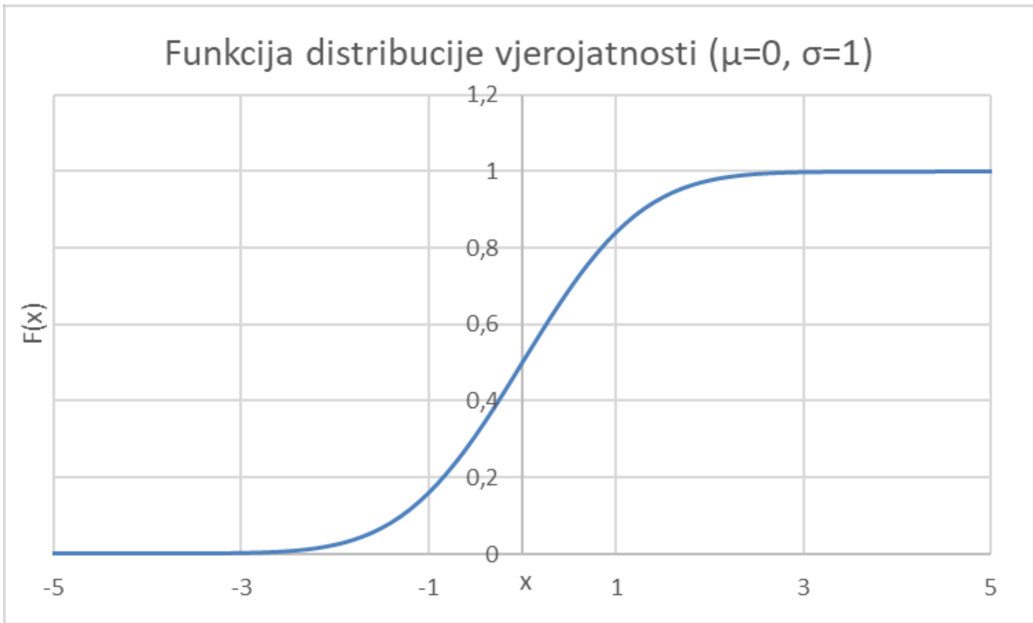
Vrijednost *z* iz gornjeg izraza često nazivamo standardni rezultat ili *z*-rezultat. *Z*-rezultat označava koliko standardnih devijacija element odstupa od srednje vrijednosti. Standardna normalna distribucija omogućava korištenje *z*-tablica za pronalaženje vjerojatnosti i kritičnih vrijednosti, [3].

Funkciju gustoće vjerojatnosti od *Z* možemo grafički prikazati (Slika 6).



Slika 6. Funkcija gustoće vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable

Također, isto tako možemo prikazati i funkciju distribucije vjerojatnosti za standardnu normalnu distribuciju (Slika 7).



Slika 7. Funkcija distribucije vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable

Normalna distribucija $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ može se transformirati u standardnu normalnu distribuciju $Z \sim N(0,1)$ pomoću z-transformacije

$$z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}.$$

Grafička interpretacija z-transformacije je da prvo X-μ translatira središte krivulje iz μ u 0, a potom dijeljenje sa σ prilagodi širinu krivulje.

Ova transformacija omogućuje pretvaranje različitih normalnih distribucija u standardizirani oblik sa srednjom vrijednošću 0 i standardnom devijacijom 1. Standardizacija je korisna jer omogućuje korištenje z-tablica za pronalaženje vjerojatnosti i kritičnih vrijednosti, što olakšava usporedbu i analizu različitih distribucija.

3.3 PRIMJERI

Za izračune i grafički prikaz normalne distribucije navedenih primjera korišten je program Microsoft Excel.

3.3.1 PRIMJER 1

Poznato je da se dijastolički krvni tlak osoba srednje dobi, koji se mjeri u milimetrima žive (mmHg), može aproksimirati normalnom distribucijom čiji su parametri očekivanje 83.5 te varijanca 12.25.

(a) Potrebno je zapisati cjelobrojne vrijednosti koje ova slučajna varijabla poprima unutar intervala tri sigme, izračunati vrijednosti funkcije gustoće vjerojatnosti u tim točkama i nacrtati njen graf te izračunati vrijednosti funkcije distribucije vjerojatnosti u tim točkama i nacrtati njen graf.

(b) Potrebno je izračunati vjerojatnost da dijastolički krvni tlak osobe srednje dobi bude više od 80 mmHg.

(c) Hipertenziju imaju osobe kod kojih je dijastolička vrijednost barem 90 mmHg, potrebno je izračunati vjerojatnost da osoba srednje dobi ima hipertenziju.

Parametri normalne distribucije:

očekivanje, μ=83.5,

varijanca, σ^2 =12.25,

standardna devijacija, $\sigma=\sqrt{12.25}$=3.5.

(a) Interval tri sigme dobijemo na sljedeći način:

$$\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$$

$$83.5 - 3 * 3.5 \leq X \leq 83.5 + 3 * 3.5$$

$$73 \leq X \leq 94$$

Cjelobrojne vrijednosti unutar intervala "tri sigme" su od 73 do 94.

Za početak dolazi do izračunavanja funkcije gustoće vjerojatnosti te se koristi funkcija *NORM.DIST* u Excelu s parametrom *FALSE* za funkciju gustoće vjerojatnosti. Unosi se naredba

=NORM.DIST(A2;83,5;3,5;FALSE)

za svaku vrijednost *X* od 73 do 94, vrijednosti su raspoređene od ćelije A2 do A23. Potom se računa funkcija distribucije vjerojatnosti unosom funkcije

=NORM.DIST(A2;83,5;3,5;TRUE)

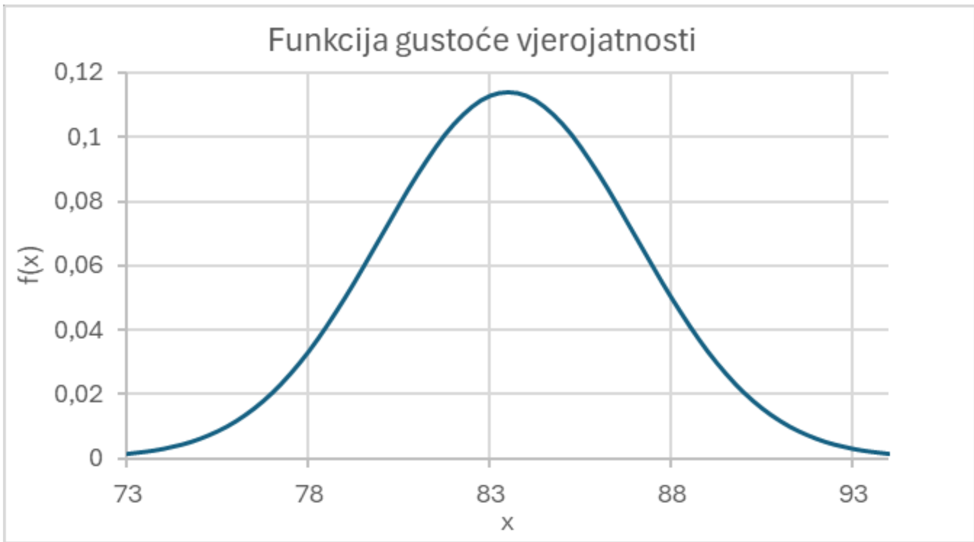
s parametrom *TRUE* također za svaku vrijednosti *X* od 73 do 94 koje su raspoređene od ćelije A2 do A23.

Dobivene vrijednosti prikazane su na Slici 8.

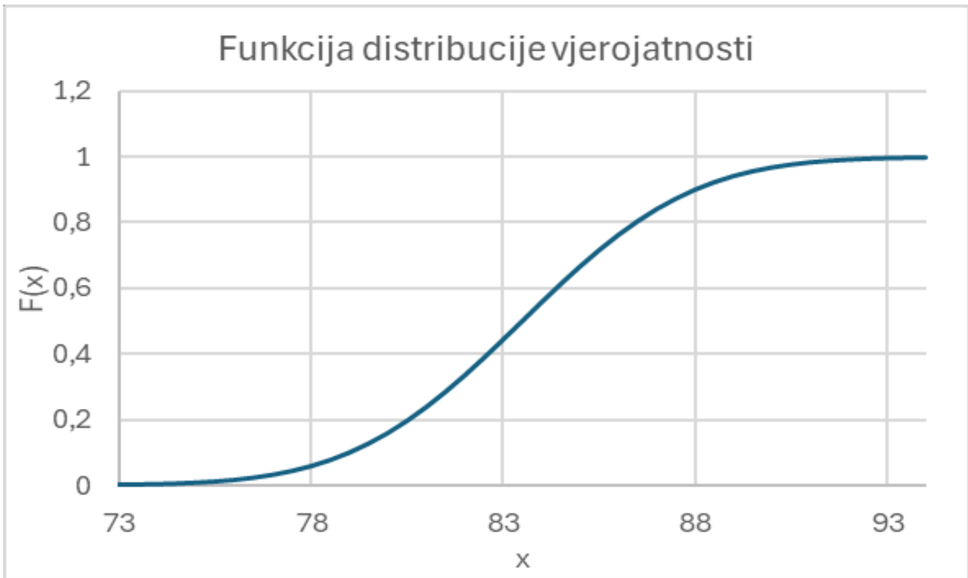
x	f(x)	F(x)
73	0,001266	0,00135
74	0,002864	0,003321
75	0,005972	0,007579
76	0,011475	0,016062
77	0,020319	0,031645
78	0,033161	0,058042
79	0,049875	0,099271
80	0,069134	0,158655
81	0,088319	0,237525
82	0,103982	0,334118
83	0,112826	0,443202
84	0,112826	0,556798
85	0,103982	0,665882
86	0,088319	0,762475
87	0,069134	0,841345
88	0,049875	0,900729
89	0,033161	0,941958
90	0,020319	0,968355
91	0,011475	0,983938
92	0,005972	0,992421
93	0,002864	0,996679
94	0,001266	0,99865

Slika 8. Dobivene vrijednosti f(x) i F(x)

Zatim se crtaju grafovi za funkciju gustoće i distribucije vjerojatnosti koristeći vrijednosti X na x-osi te na y-osi izračunate vrijednosti funkcije. Rezultati su prikazani na slikama 9 i 10.



Slika 9.Funkcija f za dijastolički krvni tlak



Slika 10. Funkcija F za dijastolički krvni tlak

(b) Trebamo dobiti $P(X > 80)$. S obzirom da je ukupna vjerojatnost jednaka 1, iskoristimo da je $P(X > 80) = 1 - P\,(X \leq 80)$. Vrijednost $P\,(X \leq 80)$ računamo kao i prije, pomoću naredbe *NORM.DIST*. U Excel upisujemo

1-NORM.DIST(80;83,5;3,5;TRUE).

Kao rezultat dobijemo 0,841344746.

(c) Još je potrebno odrediti vjerojatnost da osoba ima hipertenziju tj. $P(X \geq 90)$. Također se ponovo koristi naredba *=1-NORM.DIST(90;83,5;3,5;TRUE),* ovaj put s vrijednosti 90 te je izračunata vjerojatnost da osoba ima hipertenziju koja iznosi $P(X \geq 90)$= 0,031645416.

3.3.2 PRIMJER 2

Poznato je da se količina hemoglobina u uzorku krvi kod žena, izražena u gramima po decilitru (g/dL), može opisati normalno distribuiranom slučajnom varijablom X s očekivanjem 13.8 i standardnom devijacijom 0.5.

(a) Potrebno je izračunati vjerojatnost da količina hemoglobina u krvi poprimi vrijednost manju od 14.1 g/dL.
(b) Također, potrebno je izračunati vjerojatnost da količina hemoglobina u krvi poprimi vrijednost veću od 13.5 g/dL, ali najviše 14.7 g/dL.

Paramteri normalne distribucije:

očekivanje, μ=13.8,

standardna devijacija σ=0.5.

(a) Za izračunavanje vjerojatnosti da količina hemoglobina bude manja od 14.1 g/dL, kao i u Primjeru 1, za normalnu distribuciju koristi se funkcija *NORM.DIST* u Excelu. U Excel je prvo potrebno napisati vrijednost 14.1 u proizvoljnu ćeliju (u ovom slučaju A2), potom u novu ćeliju napisati funkciju: *=NORM.DIST(A2;13,8;0,5;TRUE)* iz koje se dobije vjerojatnost da količina hemoglobina u krvi poprimi vrijednost manju od 14.1 g/dL te iznosi $P(X < 14.1)$= 0,725746882.

(b) Za izračunavanje vjerojatnosti da količina hemoglobina bude između 13.5 g/dL i 14.7 g/dL nužno je izračunati dvije funkcije distribucije vjerojatnosti i ih oduzeti. Imat ćemo

$$P(13.5 < X < 14.7) = P(X - 14.7) - P(X < 13.5).$$

U dvije proizvoljno odabrane ćelije (u ovom slučaju A3 i A4) unesu se vrijednosti 13.5 i 14.7. Slijedi unos formula za vjerojatnosti *=NORM.DIST(A3;13,8;0,5;TRUE)* i *=NORM.DIST(A4;13,8;0,5;TRUE)* te su dobivene vrijednosti $P(X < 13.5)$= 0,274253118 i $P(X < 14.7)$= 0,964069681.

Slijedi računanje razliku dviju dobivenih vrijednosti kako bi se dobila među vjerojatnost koja iznosi $P(13.5 < X < 14.7)$=0,689816563.

4. EKSPONENCIJALNA DISTRIBUCIJA

4.1 DEFINICIJA

Eksponencijalna distribucija široko je korišten model u inženjerstvu i znanosti, posebno za modeliranje vremena između uzastopnih događaja u Poissonovim procesima. Eksponencijalna slučajna varijabla opisuje vrijeme između događaja kao što su telefonski pozivi, kvarovi komponenti ili intervali između prirodnih katastrofa.

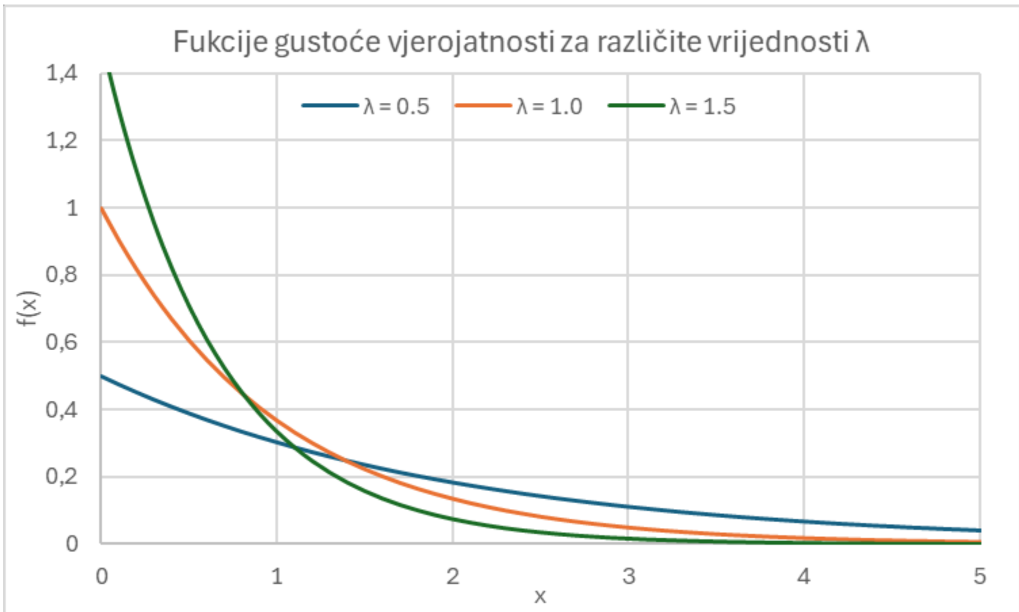
Funkcija gustoće vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable *X* definirana je kao:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ ako je } x \geq 0,$$

$$f(x) = 0 \text{ ako je } x < 0,$$

gdje je $\lambda > 0$ parametar eksponencijalne slučajne varijable, [7].

Na Slici 11 prikazani su grafovi funkcije *f* uz tri različite vrijednosti parametra λ. Uočavamo da vrijednost funkcije u nuli iznosi λ nakon čega funkcija pada i asimptotski se približava nuli.



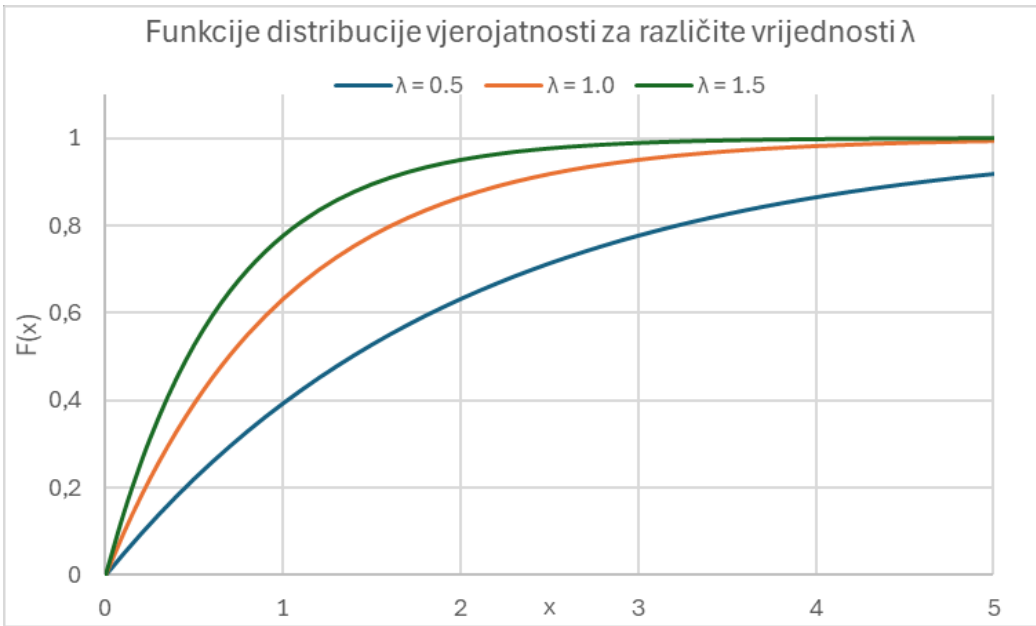
Slika 11. Funkcija f za eksponencijalnu slučajnu varijablu

Funkcija distribucije vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable *X* dana je izrazom:

$$F(X) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ ako je x} \geq 0,$$

$$F(X) = 0 \text{ ako je x} < 0.$$

Na Slici 12 prikazani su grafovi funkcije F za tri vrijednosti parametra λ, iste kao na Slici 11. Vrijednost funkcije F u nuli je 0, a potom raste i asimptotski se približava jedinici. Brzina rasta ovisi o parametru λ.



Slika 12. Funkcija F za eksponencijalnu slučajnu varijablu

Za crtanje prikazanih grafova funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije vjerojatnosti korišten je program Microsoft Excel te naredbe

EXPON.DIST(x;lambda;FALSE)

za funkciju gustoće vjerojatnosti i

EXPON.DIST(x;lambda;TRUE)

za funkciju distribucije vjerojatnosti.

Za eksponencijalnu slučajnu varijablu X s parametrom λ, očekivanje i standardna devijacija opisuju se kao:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

4.2 PRIMJER

Pretpostavimo da se kvarovi na stroju događaju prema eksponencijalnoj distribuciji s parametrima λ=0.1. Tada funkcija gustoće vjerojatnosti i funkcija distribucije vjerojatnosti izgledaju ovako:

$$f(x) = 0.1e^{-0.1x},$$

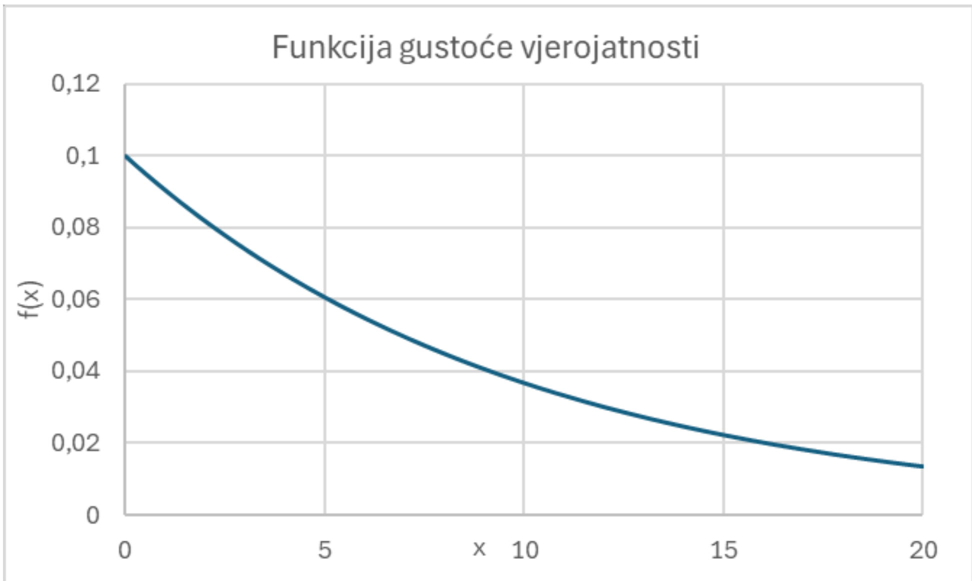
$$F(x) = 1 - e^{-0.1x}.$$

Ako želimo izračunati vjerojatnost da će se sljedeći kvar dogoditi unutar 10 sati, koristimo funkciju distribucije vjerojatnosti

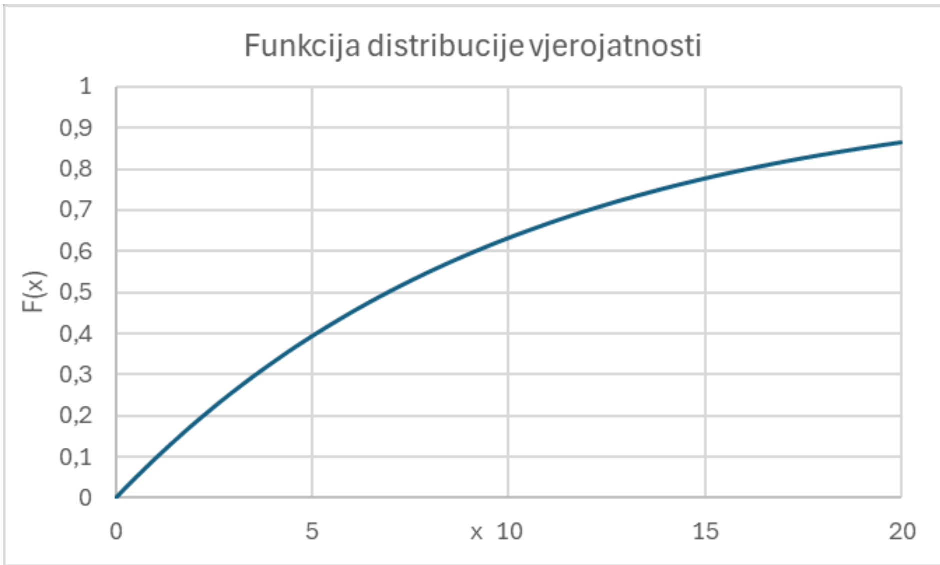
$$F(x) = 1 - e^{-0.1\times10} = 1 - e^{-1} \approx 0.6321.$$

Zaključno, postoji približno 63.21% šanse da će se kvar dogoditi unutar 10 sati.

Navedeni primjer također se može izračunati pomoću naredbe *EXPON.DIST* u programu Microsoft Excel. Potrebno je unijeti vrijednosti *x* od 0 do 20 te za funkciju gustoće vjerojatnosti koristiti naredbu *=EXPON.DIST(x;0,1;FALSE)* (Slika 13), a za funkciju distribucije vjerojatnosti *=EXPON.DIST(x;0,1;TRUE)* (Slika 14).



Slika 13. Funkcija gustoće vjerojatnosti za eksponencijalnu distribuciju za λ = 0.1



Slika 14. Funkcija distribucije vjerojatnosti za eksponencijalnu distribuciju za λ = 0.1

5. BETA DISTRIBUCIJA

5.1 DEFINICIJA

Beta distribucija vrlo je korisna distribucija u statistici zbog svoje fleksibilnosti i sposobnosti da modelira slučajne varijable koje su ograničene na neki interval, najčešće od 0 do 1. Najčešće se koristi za modeliranje proporcija i postotaka. Beta distribucija definirana se s dva parametra, alfa (α) i beta (β), pri čemu su oba pozitivna.

Ako je X slučajna varijabla s beta distribucijom, tada je funkcija gustoće vjerojatnosti dana izrazom

$$f(x) = \frac{1}{B-A} \times \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\times\Gamma(\beta)} \times \left(\frac{x-A}{B-A}\right)^{\alpha-1} \times \left(\frac{B-x}{B-A}\right)^{\beta-1}, \; A \leq x \; \leq B.$$

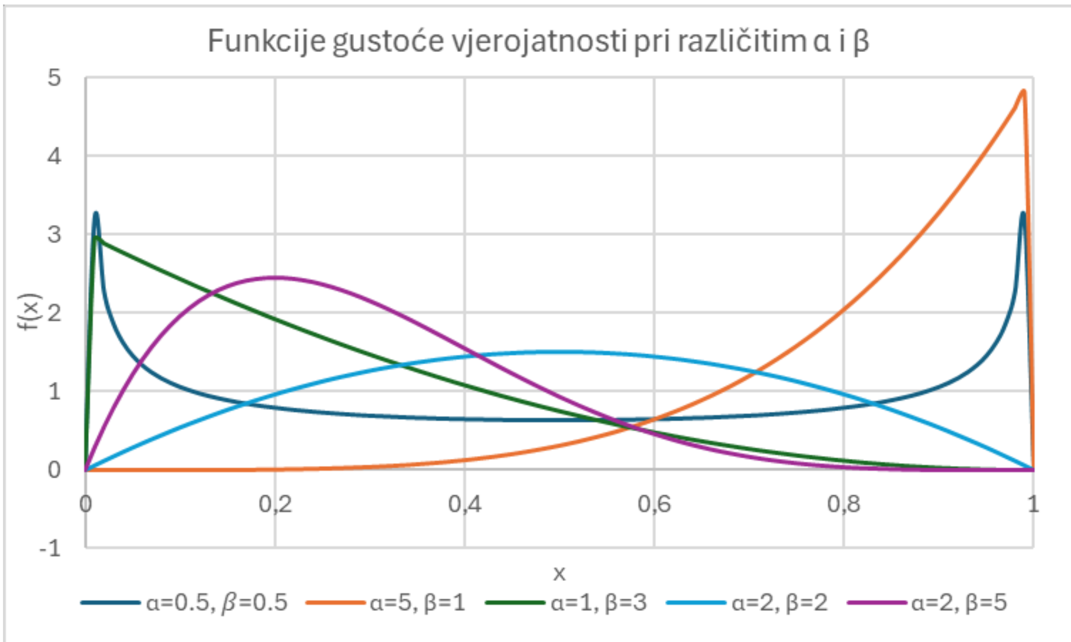
Za standardnu beta distribuciju, A je 0, a B je 1, čime se funkcija pojednostavljuje

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\times\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \; 0 \leq x \leq 1$$

gdje je Γ gama funkcija.

Gama funkcija (Γ) proširenje je funkcije faktorijel, definirana za sve kompleksne brojeve osim negativnih cijelih brojeva,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \Re(z) > 0.$$



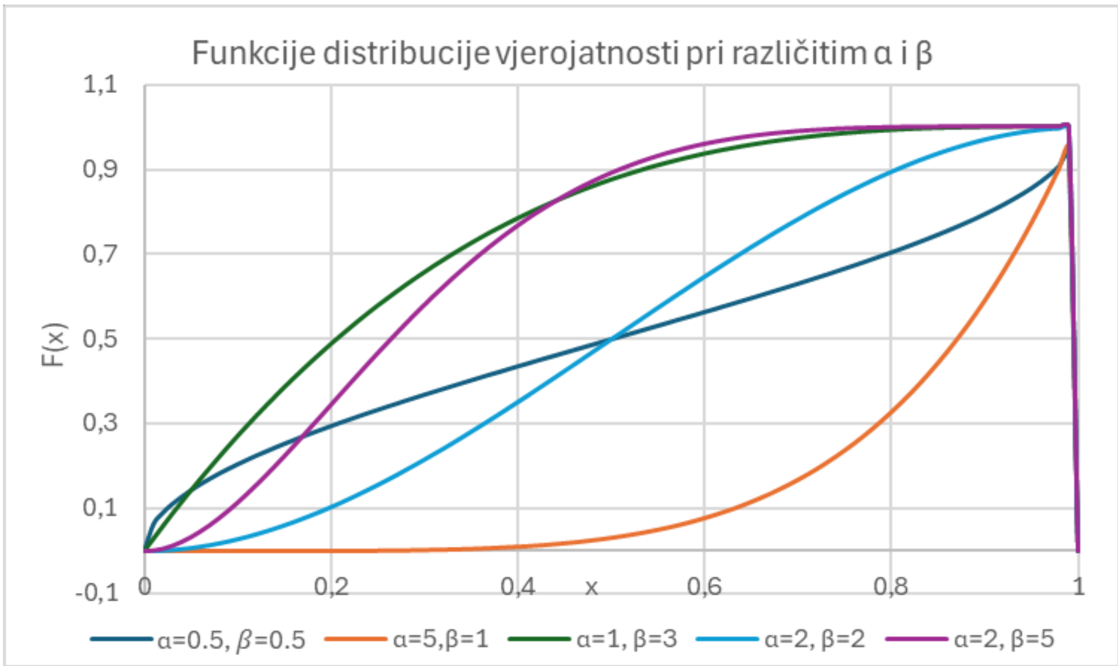
Slika 15. Funkcija f za beta distribuciju pri različitim α i β

Ova distribucija vrlo je fleksibilna jer različite vrijednosti parametara α i β mogu proizvesti različite oblike funkcije gustoće vjerojatnosti, uključujući jednoličnu, U-oblikovanu, obrnutu U-oblikovanu i druge oblike, [5]. Nekoliko oblika funkcije *f* prikazano je na Slici 15.

Funkciju distribucije vjerojatnosti za beta distribuciju opisujemo kao

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Ona je prikazana na Slici 16.



Slika 16. Funkcija F za beta distribuciju pri različitim α i β

Za crtanje prikazanih grafova funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije vjerojatnosti korišten je program Microsoft Excel te naredbe

=BETA.DIST(x;alpha;beta;FALSE)

za funkciju gustoće vjerojatnosti i

=BETA.DIST(x;alpha;beta;TRUE)

za funkciju distribucije vjerojatnosti.

Za beta slučajnu varijablu X s parametrima α i β, očekivanje je definirano kao

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

a standardna devijacija kao

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{\sigma\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}}.$$

5.2 PRIMJER

Pretpostavimo da imamo projektni zadatak u kojem koristimo PERT metodu za koordinaciju različitih aktivnosti u velikom projektu. Standardna pretpostavka u PERT analizi je da vrijeme potrebno za dovršetak bilo koje aktivnosti, jednom kada je započeta, ima beta distribuciju s optimističnim vremenom *A* (ako sve ide dobro) i pesimističnim vremenom *B* (ako sve ide loše).

Na primjer, u izgradnji obiteljske kuće, vrijeme *X* izraženo u danima potrebno za postavljanje temelja ima beta distribuciju s *A*=2 dana i *B*=5 dana, te parametrima α=2 i β=2.

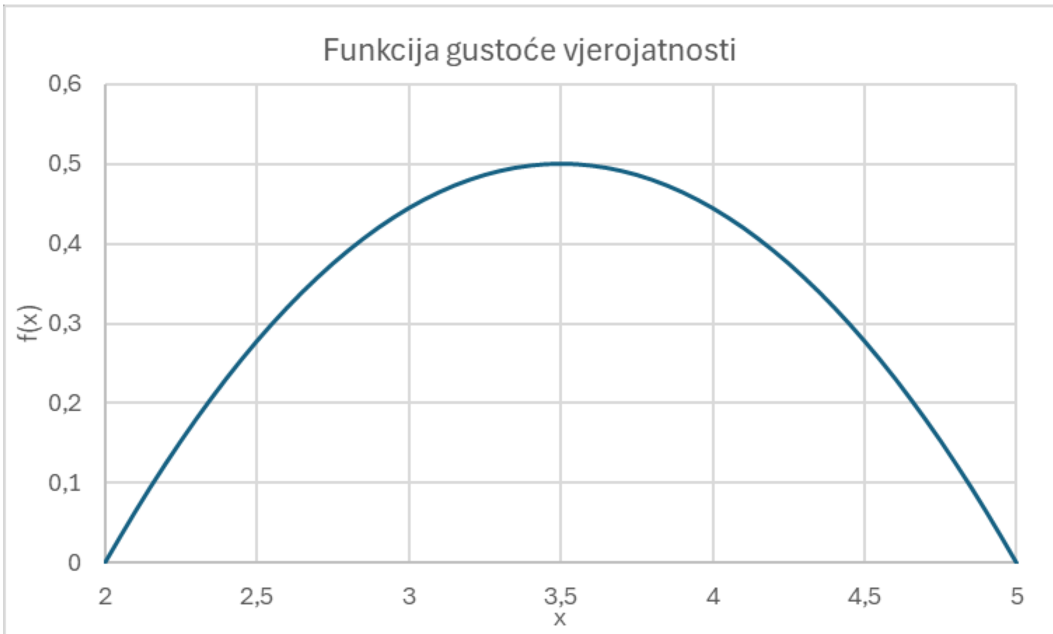
Vjerojatnost da je potrebno najviše 3 dana za postavljanje temelja može se izračunati integracijom funkcije gustoće vjerojatnosti

$$P(X \leq 3) = \int_2^3 f(x; \alpha, \beta, A, B)dx.$$

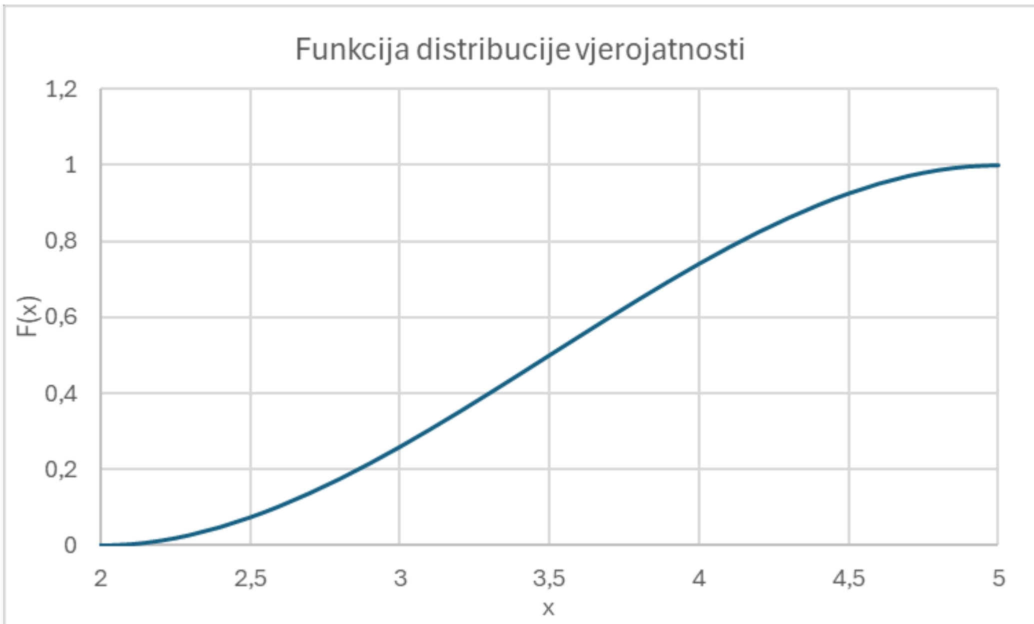
U programu Microsoft Excel koristili smo naredbu

=BETA.DIST(3;2;2;TRUE;2;5),

i time dobili rezultat koji iznosi 0,259259259.



Slika 17. Funkcija gustoće vjerojatnosti za beta distribuciju pri α=2 i β=2



Slika 18. Funkcija distribucije vjerojatnosti za beta distribuciju pri $\alpha=2$ i $\beta=2$

Za navedeni primjer nacrtali smo grafove funkcija f i F u Excelu. Koristili smo naredbe *=BETA.DIST(x;2;2;FALSE;2;5)* za funkciju gustoće vjerojatnosti (Slika 17) i *=BETA.DIST(x;2;2;TRUE;2;5)* za funkciju distribucije vjerojatnosti (Slika 18).

6. STUDENTOVA T-DISTRIBUCIJA

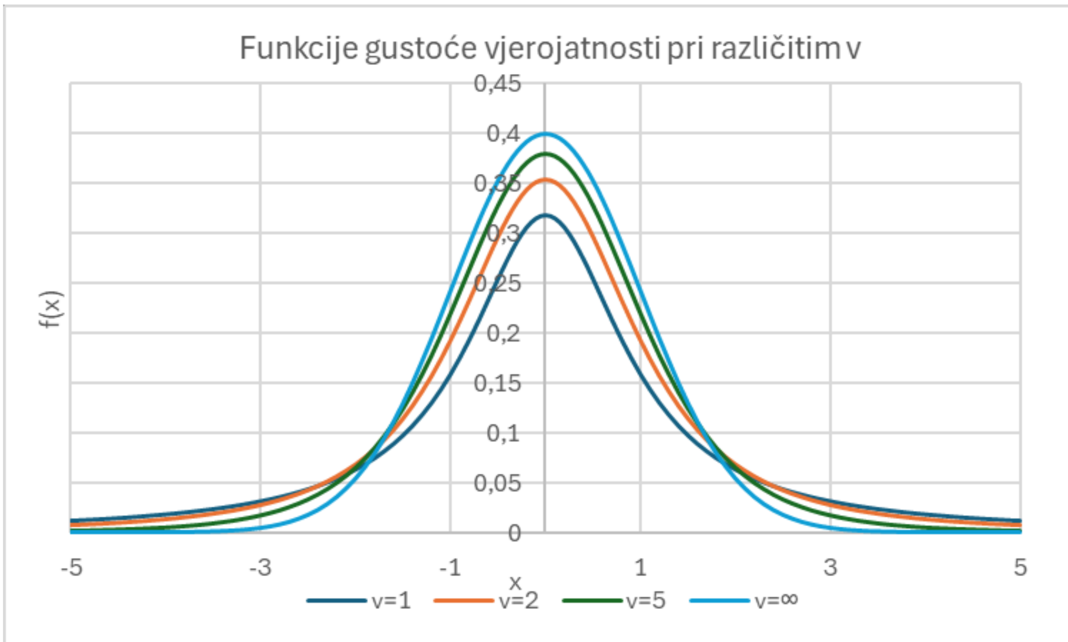
6.1 DEFINICIJA

Studentova t-distribucija kontinuirana je distribucija vjerojatnosti koja generalizira standardnu normalnu distribuciju. Poput normalne distribucije, simetrična je oko nule i ima oblik zvona. Međutim, t-distribucija ima deblje repove, što znači da ima veću vjerojatnost za ekstremne vrijednosti. Ovo svojstvo kontrolira parametar stupnjeva slobode (ν). Za ν = 1, t-distribucija postaje standardna Cauchy distribucija, a za ν → ∞, postaje standardna normalna distribucija.

Matematički, funkcija gustoće vjerojatnosti t-distribucije je

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

gdje je ν broj stupnjeva slobode, a Γ je gama funkcija, [8].

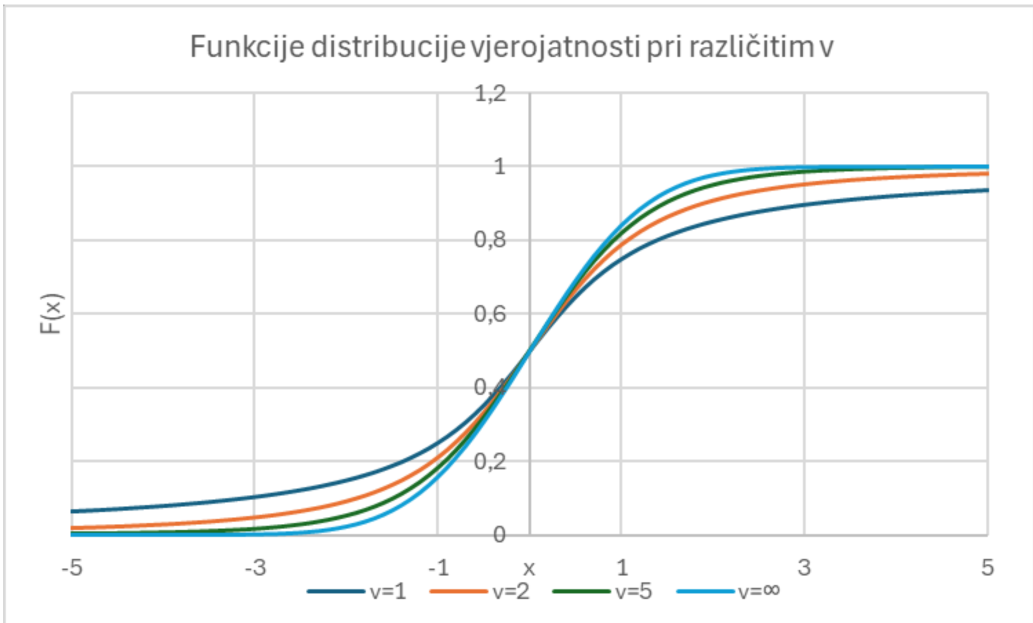


Slika 19. Funkcija f za Studentovu t-distribuciju

Funkcija distribucije vjerojatnosti za Studentovu t-distribuciju opisuje vjerojatnost da slučajna varijabla koja slijedi t-distribuciju s određenim brojem stupnjeva slobode ν, bude manja ili jednaka nekoj vrijednosti *x* te je definirana kao

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

gdje je $f(t)$ funkcija gustoće vjerojatnosti za t-distribuciju.



Slika 20. Funkcija F za Studentovu t-distribuciju

Za crtanje grafova funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije vjerojatnosti prikazanih na slikama 19 i 20 korišten je program Microsoft Excel te naredbe

=T.DIST(x;degrees_freedom;FALSE)

za funkciju gustoće vjerojatnosti i

=T.DIST(x;degrees_freedom;TRUE)

za funkciju distribucije vjerojatnosti.

Očekivanje i standardna devijacija za Studentovu t-distribuciju ovise o stupnjevima slobode ν te se opisuju kao:

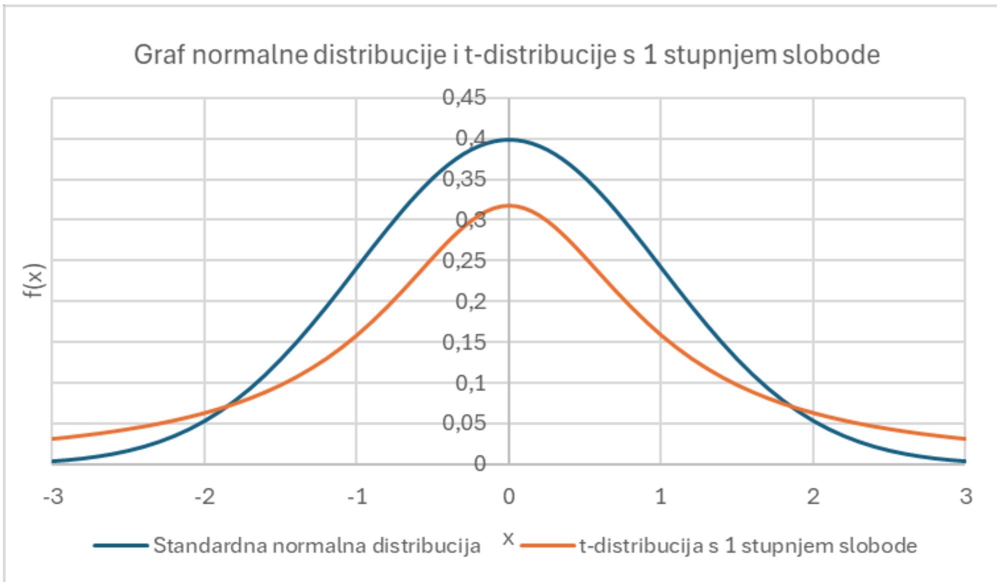
$$E(X) = 0 \;\; za \;\; \nu > 1,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \;\; za \;\; \nu > 2. \; [6]$$

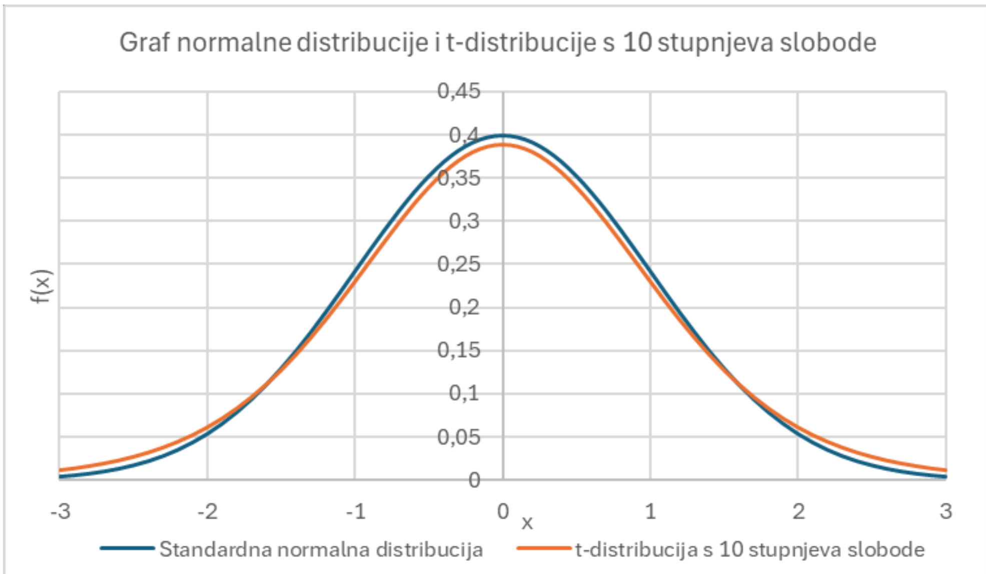
6.2 USPOREDBA S NORMALNOM DISTRIBUCIJOM

Standardna normalna distribucija ima fiksnu formu bez obzira na veličinu uzorka, dok se t-distribucija mijenja s brojem stupnjeva slobode. Studentova t-distribucija ima deblje repove, što je korisno kada radimo s malim uzorcima ili kada populacijska standardna devijacija nije poznata.

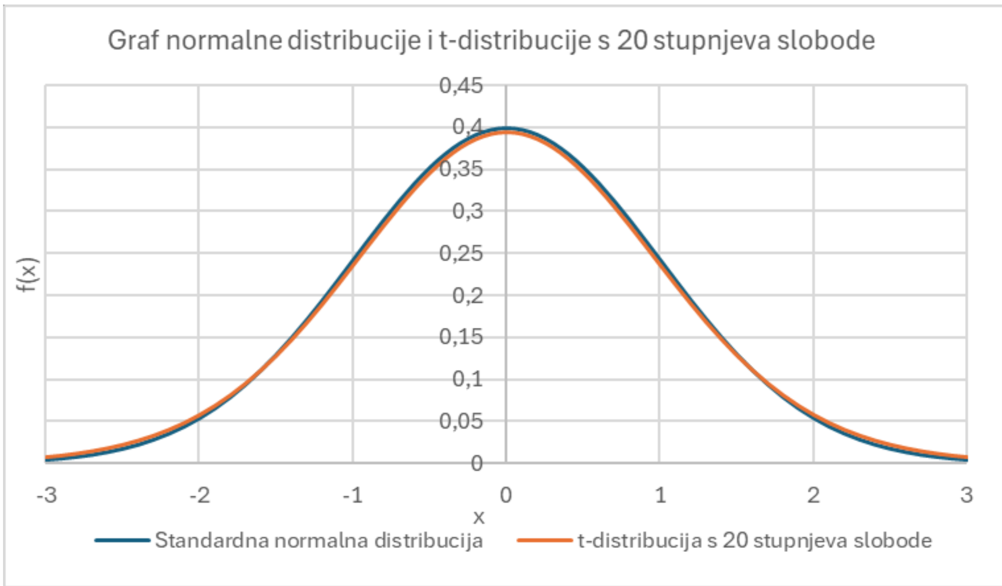
Kako se broj stupnjeva slobode povećava, t-distribucija sve se više približava standardnoj normalnoj distribuciji dok ne postanu gotovo identične. Kod više od 30 stupnjeva slobode, t-distribucija približno odgovara standardnoj normalnoj distribuciji te se stoga standardna distribucija može koristiti umjesto t-distribucije kod velikih uzoraka, [4]. Grafičke usporedbe prikazane su na Slikama 21, 22, 23 i 24.



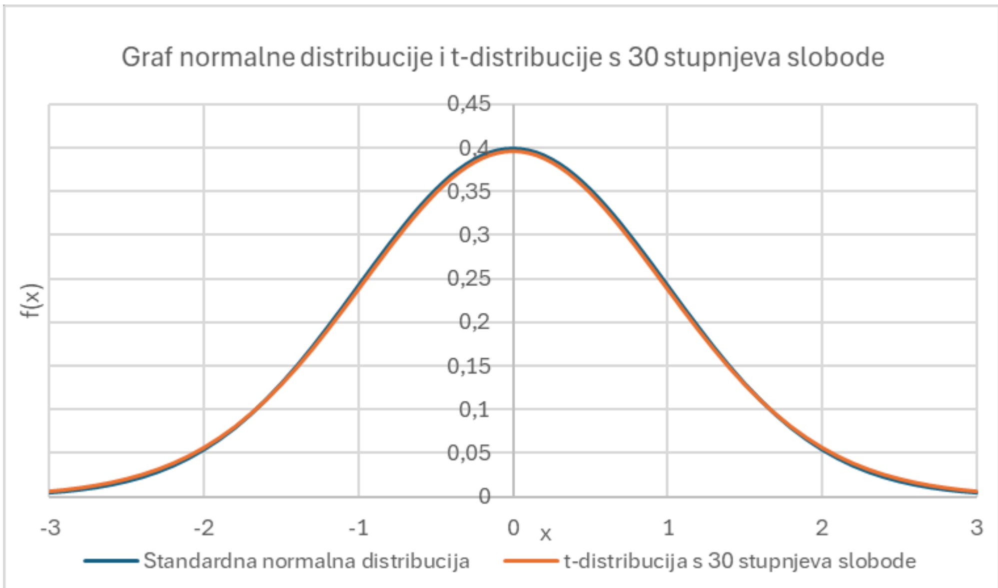
Slika 21. Graf normalne distribucije i t-distribucije s 1 stupnjem slobode



Slika 22. Graf normalne distribucije i t-distribucije s 10 stupnjeva slobode



Slika 23. Graf normalne distribucije i t-distribucije s 20 stupnjeva slobode



Slika 24. Graf normalne distribucije i t-distribucije s 30 stupnjeva slobode

7. HI-KVADRAT DISTRIBUCIJA

7.1 DEFINICIJA

Hi-kvadrat distribucija kontinuirana je distribucija vjerojatnosti koja se koristi za testiranje hipoteza o varijancama i za analizu varijance u mnogim statističkim metodama. Definirana je sumom kvadrata nezavisnih standardnih normalnih varijabli. Ako su Z_1, Z_2,…, Z_k nezavisne standardne normalne varijable, tada je slučajna varijabla Q definirana kao

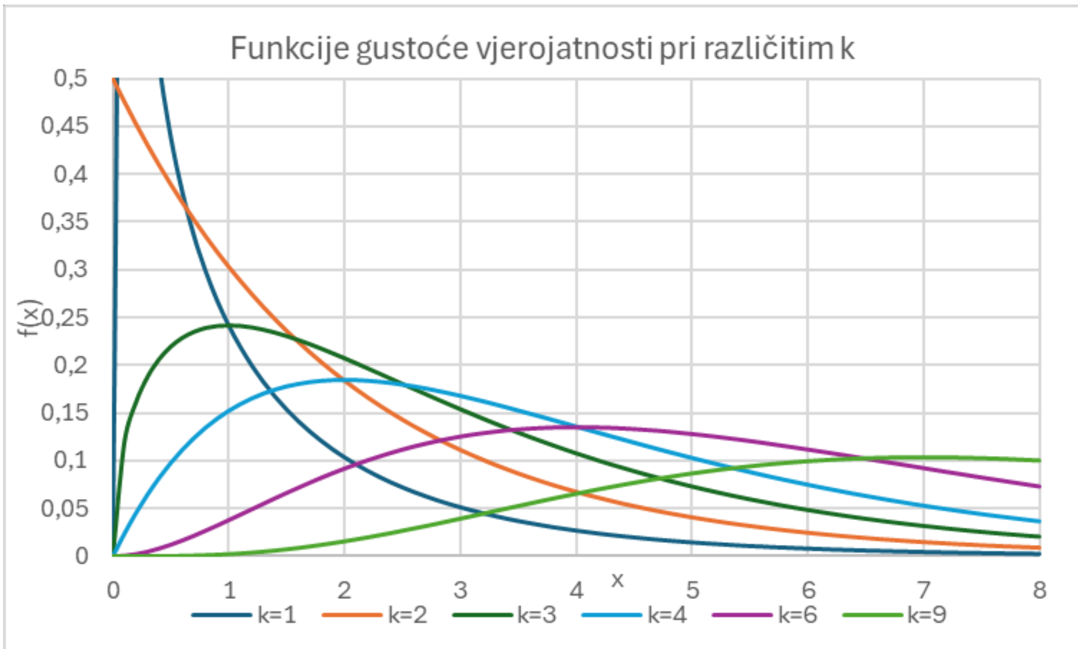
$$Q = \sum_{i=1}^{k} {Z_i}^2,$$

te ima hi-kvadrat distribuciju s k stupnjeva slobode. Ova distribucija je specijalan slučaj gama distribucije, [6].

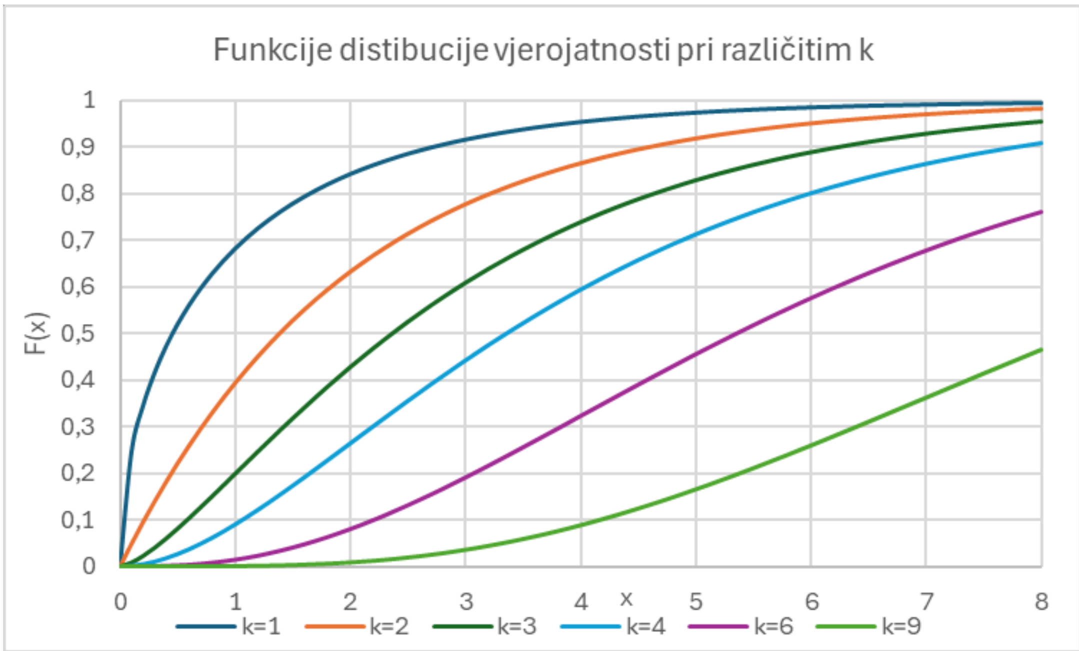
Funkcija gustoće vjerojatnosti za hi-kvadrat distribuciju opisuje se kao

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, & za\ x > 0 \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Pri tome $\Gamma(k/2)$ označava gama funkciju.



Slika 25. Funkcija f za hi-kvadrat distribuciju



Slika 26. Funkcija F za hi-kvadrat distribuciju

Za crtanje prikazanih grafova funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije distribucije vjerojatnosti korišten je program Microsoft Excel te naredbe

=CHISQ.DIST(x;degrees_freedom;FALSE)

za funkciju gustoće vjerojatnosti i

=CHISQ.DIST(x;degrees_freedom;TRUE)

za funkciju distribucije vjerojatnosti.

Za hi-kvadrat slučajnu varijablu X s k stupnjeva slobode, očekivanje je definirano kao

$$E(X) = k,$$

dok se standardna devijacija opisuje slijedećim izrazom

$$\sigma(X) = \sqrt{2k}.$$

7.2 PRIMJER

Pretpostavimo da pokušavamo locirati cilj u trodimenzionalnom prostoru, a pogreške u koordinatama odabrane točke su nezavisne normalne varijable s očekivanjem 0 i standardnom devijacijom 2. Vjerojatnost da udaljenost između odabrane točke i cilja prelazi 3 metra može se izračunati pomoću hi-kvadrat distribucije.

Udaljenost *D* između točke i cilja je

$$D = \sqrt{{X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2},$$

a kvadrat udaljenosti D^2 iznosi

$$D^2 = {X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2 \, .$$

Budući da su X_1, X_2 i X_3 nezavisne normalne varijable sa standardnom devijacijom 2 i očekivanjem 0, definiramo $Y_i = \frac{X_i}{2}$, gdje je Y_i standardna normalna varijabla te je tada $D^2 = 4\left({Y_1}^2 + {Y_2}^2 + {Y_3}^2\right)$.

Kvadratna suma ${Y_1}^2 + {Y_2}^2 + {Y_3}^2$ slijedi hi-kvadrat distribuciju s 3 stupnja slobode. Udaljenost *D* koja je veća od 3 metra znači da je $D^2 > 9$.

Za Y_i slijedi:

$$D^2 = 4({Y_1}^2 + {Y_2}^2 + {Y_3}^2) > 9,$$

$${Y_1}^2 + {Y_2}^2 + {Y_3}^2 > \frac{9}{4} = 2.25.$$

Potom računamo vjerojatnost da je udaljenost veća od 3 metra:

$$P(D > 3) = P(4({Y_1}^2 + {Y_2}^2 + {Y_3}^2) > 9),$$

$$P\left({Y_1}^2 + {Y_2}^2 + {Y_3}^2 > 2.25\right),$$

$$P(D > 3) = P(\chi^2(3) > 2.25).$$

U programu Microsoft Excel koristit ćemo funkciju *CHISQ.DIST.RT* za izračunavanje ove vjerojatnosti te u ćeliju unosimo formulu *=CHISQ.DIST.RT(2,25;3)* i dobivamo vjerojatnost za zadani uvjet koja iznosi 0,52216719, tj. 52,22%.

8. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu istraženi su ključni aspekti kontinuiranih slučajnih varijabli i njihovih distribucija, s naglaskom na njihovu važnost u statistici i inženjerstvu. Kroz analizu različitih distribucija, kao što su normalna, eksponencijalna, beta, Studentova t-distribucija i hi-kvadrat distribucija, prikazano je kako se teoretski koncepti mogu primijeniti na stvarne situacije.

Normalna distribucija, poznata po svojim jedinstvenim svojstvima i širokoj primjeni, dokazala je svoju ključnu ulogu u modeliranju mnogih prirodnih i društvenih pojava. Eksponencijalna distribucija, koja se koristi za modeliranje vremena između događaja u Poissonovom procesu, pokazala je svoju korisnost u raznim područjima poput telekomunikacija i biologije, dok je beta distribucija zahvaljujući svojoj sposobnosti modeliranja varijabli unutar određenih intervala, pronašla je primjenu u analizi proporcija i vjerodostojnosti.

Posebna pažnja posvećena je Studentovoj t-distribuciji i hi-kvadrat distribuciji, koje su ključne za statističke analize malih uzoraka i testiranje hipoteza o varijancama. Studentova t-distribucija omogućuje preciznu procjenu srednjih vrijednosti kada standardna devijacija populacije nije poznata, dok hi-kvadrat distribucija služi za testiranje hipoteza o varijancama i analizu varijance, čineći ih nezamjenjivim alatima u statističkoj analizi.

Praktična primjena ovih distribucija ilustrirana je kroz konkretne primjere i grafičke prikaze, što je pridonijelo dubljem razumijevanju i primjeni statističkih metoda.

Zaključno, rad je pokazao kako teoretske distribucije mogu pružiti uvid u stvarne probleme i pomoći u razvoju rješenja koja su statistički opravdana. Kroz detaljnu analizu i primjenu različitih distribucija, ovaj rad doprinosi boljem razumijevanju statističkih metoda i njihovoj primjeni u različitim znanstvenim i inženjerskim disciplinama, otvarajući put za daljnja istraživanja i inovacije u ovim područjima.

9. LITERATURA

[1] E. Begović Kovač, Numeričke i statističke metode, predavanja, Sveučilište u Zagrebu FKIT, 2021.

[2] J. L. Devore, Probability and Statistics for Engineering and the Sciences, Cengage Learning, 9th edition, 2014.

[3] S. M. Ross, Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Academic Press, 5th edition, 2014.

[4] T-Distribution | What It Is and How To Use It (With Examples) (scribbr.com) (Pristup 25. lipnja 2024.)

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution (Pristup 22. lipnja 2024.)

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Chi-squared_distribution (Pristup 22. lipnja 2024.)

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution (Pristup 22. lipnja 2024.)

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution (Pristup 22. lipnja 2024.)