

# Dvodimenzijski linearni dinamički sustavi

---

**Martinović, Marko**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Chemical Engineering and Technology / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:149:446395>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-17**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Chemical Engineering and Technology University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
PREDDIPLOMSKI STUDIJ PRIMIJENJENA KEMIJA

Marko Martinović

**ZAVRŠNI RAD**

Zagreb, rujan 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
PREDDIPLOMSKI STUDIJ PRIMIJENJENA KEMIJA

Marko Martinović

**DVODIMENZIJSKI LINEARNI DINAMIČKI SUSTAVI**  
**ZAVRŠNI RAD**

Mentor: prof. dr. sc. Ivica Gusić

Članovi ispitnog povjerenstva:

prof. dr. sc. Ivica Gusić

doc. dr. sc. Miroslav Jerković

doc. dr. sc. Dragana Vuk

Zagreb, rujan 2018.

## SAŽETAK

### DVODIMENZIJSKI LINEARNI DINAMIČKI SUSTAVI

Dvodimenzijски linearni dinamički sustavi važni su i učestali u znanosti i inženjerstvu (drugi Newtonov zakon gibanja gibanja, jednađba RLC kruga u elektrotehnici, jednađbe mnogih harmoničkih oscilatora). U ovom radu će se predstaviti način računalnog rješavanja takvih sustava, crtanja njihovih trajektorija i faznih portreta, i grupiranje takvih sustava u karakteristične skupine ovisno o njihovom ponašanju. Svi sustavi riješeni su u računalnom programu *Matlab R2018a* uz dodatak *Symbolic Math Toolbox-a*.

Ključne riječi: dvodimenzijски linearni dinamički sustavi, trajektorije, fazni portreti, *Matlab*

## ABSTRACT

### PLANAR LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

Planar linear dynamical systems are important and frequent in science and engineering (Newton's second law of motion, the equation for an RLC circuit in electrical engineering, equations of many harmonic oscillators). In this paper a method of solving such systems by computer will be presented, the way their trajectories and phase portraits can be drawn, and grouping such systems into characteristic groups depending on the way they behave. All systems are solved in the computer program *Matlab R2018a* with the addition of the *Symbolic Math Toolbox*.

Key words: Two dimensional linear dynamical systems, trajectories, phase portraits, *Matlab*

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2. OPĆI DIO</b> .....	<b>1</b>
<b>2.1 Dvodimenzijski problem</b> .....	<b>1</b>
<b>2.2 Trajektorije i ravnotežne točke</b> .....	<b>2</b>
<b>2.3 Linearni sustavi</b> .....	<b>6</b>
2.3.1 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednačbe realna i različita: $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$ .....	7
2.3.2 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednačbe kompleksno konjugirani brojevi: $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$ .....	10
<b>3. PREGLEDNI DIO</b> .....	<b>12</b>
<b>3.1 Rješavanje sustava i grafički prikaz dobivenih rješenja</b> .....	<b>12</b>
<b>3.2 Odabir parametara</b> .....	<b>14</b>
3.2.1 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednačbe realna i različita: $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$ .....	14
3.2.2 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednačbe kompleksno konjugirani brojevi: $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$ .....	15
<b>4. REZULTATI I RASPRAVA</b> .....	<b>16</b>
<b>4.1 Sedlo</b> .....	<b>16</b>
<b>4.2 Ponor</b> .....	<b>19</b>
<b>4.3 Izvor</b> .....	<b>22</b>
<b>4.4 Središte</b> .....	<b>24</b>
<b>4.5 Ponor - žarište</b> .....	<b>26</b>
<b>4.6 Izvor - žarište</b> .....	<b>27</b>

<b>5. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>30</b>
<b>6. LITERATURA .....</b>	<b>30</b>
<b>7. PRILOZI .....</b>	<b>30</b>
<b>8. ŽIVOTOPIS.....</b>	<b>32</b>

# 1. UVOD

Dvodimenzijski dinamički sustav je sustav dviju varijabli ( $x$  i  $y$ ) za koji vrijedi  $x' = f(x, y, t)$  i  $y' = g(x, y, t)$ , pri čemu je  $t$  vrijeme,  $x' = dx/dt$  (brzina promjene varijable  $x$ ) i  $y' = dy/dt$  (brzina promjene varijable  $y$ ). Matematički gledano to je sustav od dvije obične diferencijalne jednačbe. Kada su funkcije  $f$  i  $g$  linearne, ti su sustavi linearni. S obzirom na to, dvodimenzijski linearni dinamički sustavi opisuju dvije varijable kojima brzine promjene u vremenu linearno ovise o njima.

## 2. OPĆI DIO

### 2.1 Dvodimenzijski problem

Sustav diferencijalnih jednačbi povezani je skup diferencijalnih jednačbi oblika:

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{1}$$

U tome sustavu  $f_j$  su funkcije  $n + 1$  realnih varijabli  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i  $t$ . Ako nije drugačije navedeno, pretpostavlja se da su  $f_j$  glatke funkcije, tj. parcijalne derivacije svih redova postoje, i ujedno su neprekinute.

Ako se uzme da je  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  i shodno tome  $F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ ,

sustav (1) se može zapisati kao:



$$X'(t) = F(t, X(t)). \quad (2)$$

Rješenje takvog sustava oblika je  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Ako se sve funkcije  $f_j$  toga sustava mogu zapisati tako da ne ovise o varijabli  $t$ , sustav je autonoman.

Kada za takav sustav vrijedi da je  $n = 2$ , sustav je dvodimenzijski.

Dvodimenzijski realni autonomni sustavi mogu se zapisati kao:

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, y) \\ dy/dt &= g(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

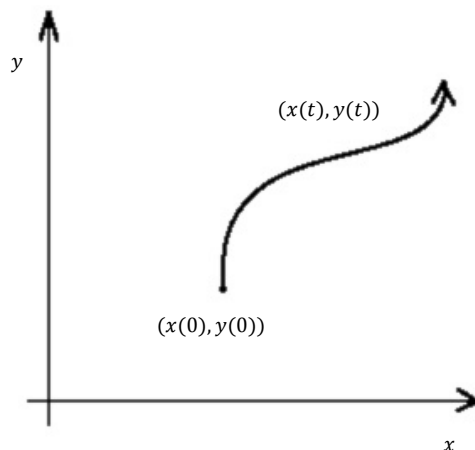
Sustav (3) se može zapisati i kao  $dX/dt = F(X)$ , pri čemu je  $X = (x, y)$ , a  $F(X) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ .  $F(x, y)$  definira vektor kod kojeg su  $x$ - i  $y$ -komponente  $f(x, y)$  i  $g(x, y)$ . Ako se ishodište toga vektora postavi u točku  $(x, y)$ , onda je skup svih takvih vektora vektorsko polje sustava. Da ne bi došlo do preklapanja pojedinih vektora vektorskog polja, za grafički prikaz vektorskog polja vektori se ponekad zamjenjuju vektorima ekvivalentnim s obzirom na smjer, orijentaciju i ishodište, a konstantnih po veličini. Tako dobiveno vektorsko naziva se poljem smjera.

## 2.2 Trajektorije i ravnotežne točke

Trajektorije (orbite, putanje) i ravnotežne (fiksne, stacionarne) točke važni su elementi dinamičkih sustava koji daju uvid u ponašanje takvih sustava. U ovom radu promatrat će se isključivo trajektorije, ravnotežne točke i fazni portreti sustava (3).

Pri postojanju početnih uvjeta sustava  $x(0)$  i  $y(0)$ , sustav ima jedinstveno rješenje koje je oblika  $(x(t), y(t))$ . Rješenje se često predočava pripadnom trajektorijom.

Trajektorija je skup svih točaka  $(x(t), y(t))$  za  $t \geq 0$  u  $x, y$  ravnini (slika 1.) To je krivulja koja počinje u točki  $(x(0), y(0))$ .



Slika 1. Trajektorija nekog sustava (3) s početnom točkom u  $(x(0), y(0))$

Za trajektorije općenito vrijedi sljedeće:

1. Dvije trajektorije ili su jednake ili disjunktne (kao podskupovi ravnine), tj. ako se uzme bilo koja točka trajektorije kao početna točka, krivulja se ne mijenja, nego samo dolazi do pomaka u vremenu.
2. Svakom točkom ravnine prolazi neka trajektorija.

Postoji i poseban slučaj trajektorije koji se sastoji od samo jedne točke sustava. Ta je točka onda nužno i ravnotežna točka sustava.

Ravnotežna točka sustava (3) je točka  $(\bar{x}, \bar{y})$  koja zadovoljava uvjet  $f(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Drugim riječima to je točka u kojoj su brzine promjene i varijable  $x$  i varijable  $y$  jednake nuli. Kada je sustav u jednom trenutku u ravnotežnoj točki, on zauvijek u njoj i ostaje.

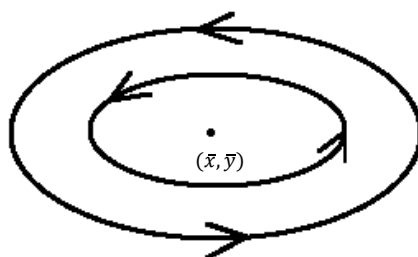
Ako svaka trajektorija sustava koja počinje blizu ravnotežne točke ostaje blizu nje, ona se onda zove **stabilnom ravnotežnom točkom**. Ravnotežna točka za koje to ne vrijedi naziva se **nestabilnom ravnotežnom točkom**.

Ako svaka orbita koja se nalazi u blizini ravnotežne točke konvergira prema njoj, tada se ta ravnotežna točka naziva **asimptotski stabilnom ravnotežnom točkom**.

Ako sustav nije u ravnoteži, onda postoji nekoliko mogućnosti daljnjeg tijeka njegovog ponašanja:

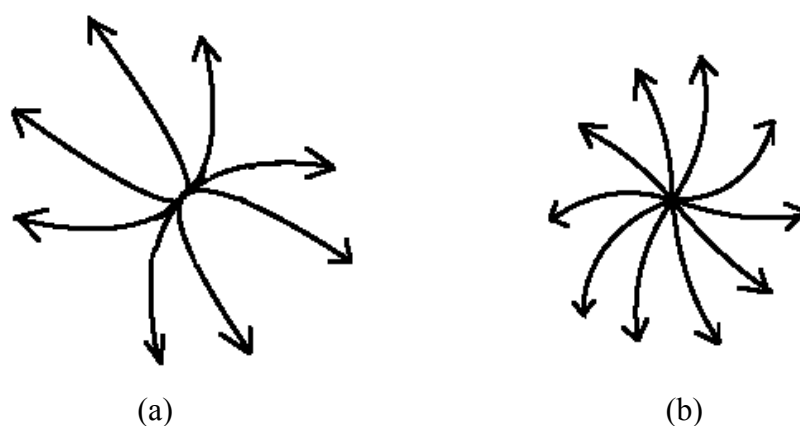
1. Sustav se niti vraća niti udaljava od ravnotežne točke, nego kruži oko nje.

Tada je ravnotežna točka stabilna, i to **središte** (centar) (slika 2.)



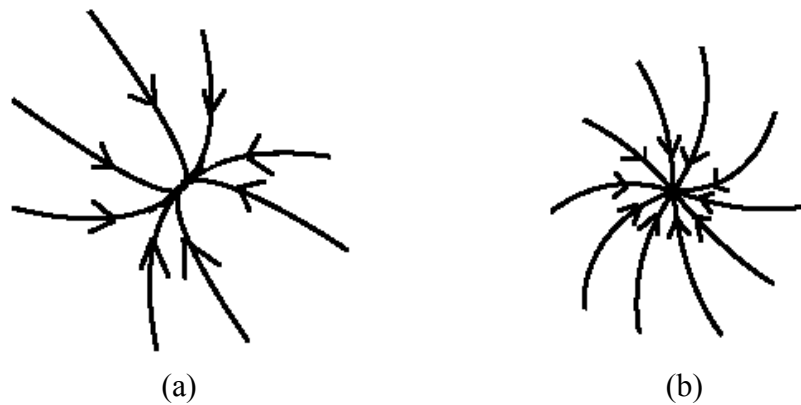
Slika 2. Središte

2. Sustav se udaljava od ravnotežne točke. Tada je ravnotežna točka nestabilna, i to **izvor** (odbijajuća točka). Izvor može biti **čvor** ili **žarište**.



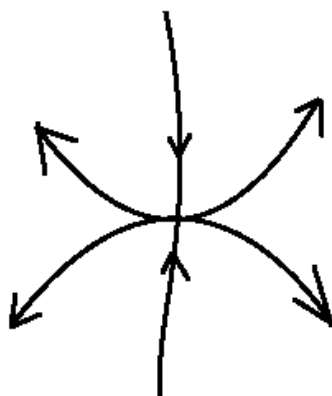
Slika 3. Izvor - čvor (a), izvor - žarište (b)

3. Sustav se vraća u ravnotežu. Tada je ravnotežna točka asimptotski stabilna, i to **ponor** (atraktor). Ponor može biti **čvor** ili **žarište** (slika 4.).



Slika 4. Ponor - čvor (a), ponor - žarište (b)

4. Sustav se u nekim slučajevima vraća u ravnotežu, a u nekim se slučajevima udaljava od nje. Tada je ravnotežna točka nestabilna, i to **sedlo** (sedlasta točka) (slika 5.).



Slika 5. Sedlo

Svi spomenuti pojmovi su lokalni, tj. vrijede samo pri nekoj udaljenosti od ravnotežne točke. Ako pak vrijede za sve točke koje se razmatraju u sustavu, tada su globalni (to će biti kod linearnih sustava).

Da bi se prikazao globalni karakter sustava, nekoliko se karakterističnih trajektorija sustava grafički prikazuje, što se onda naziva **faznim portretom**, a uz koji se često dodaje i vektorsko polje.

### 2.3 Linearni sustavi

Sustav (3) linearan je kada su funkcije  $f$  i  $g$  linearne, tj. kada se sustav (3) može zapisati kao:

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax + by \\ dy/dt &= cx + dy. \end{aligned} \tag{4}$$

U takvome su sustavu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  konstante. Te se konstante nazivaju **parametrima** sustava i mogu se zapisati matricom:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Takva se matrica u ovom kontekstu naziva **matricom koeficijenata**, odnosno matricom sustava, a takav se sustav može pojednostavljeno zapisati kao  $X' = AX$ .

Kvalitativno ponašanje sustava (4) ovisit će isključivo o parametrima sustava, a vrijednost  $\lambda$  koja objedinjuje parametre sustava naziva se **svojstvenom vrijednošću**, tj. rješenjem **karakteristične jednadžbe**:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \tag{5}$$

U tom slučaju rješenja su jednaka:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d \mp \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}. \tag{6}$$

Kada je  $ad - bc = 0$ , tada je jedno rješenje karakteristične jednadžbe jednako nuli, a drugo je neki realan broj. Za sve daljnje sustave uvijek se pretpostavlja da je  $ad - bc \neq 0$ , odnosno da nijedno rješenje karakteristične jednadžbe nije jednako nuli.

Kroz rad se prate dva osnovna slučaja:

1. Rješenja karakteristične jednadžbe dva su realna i različita broja, tj. zadovoljavaju uvjet:

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0. \quad (7)$$

2. Rješenja karakteristične jednadžbe dva su kompleksno konjugirana broja, tj. zadovoljavaju uvjet:

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0. \quad (8)$$

Prvi slučaj je karakterističan po tome što fazni portreti sadrže dva pravca koja se sijeku u ishodištu, a na kojima ujedno leže linearno neovisni **svojstveni vektori** sustava. Svojstveni vektori  $V_1$  i  $V_2$  su vektori različiti od nule koji zadovoljavaju uvjete  $AV_1 = \lambda_1 V_1$  i  $AV_2 = \lambda_2 V_2$ , odnosno uvjete:

$$AV_{1,2} = \lambda_{1,2} V_{1,2}. \quad (9)$$

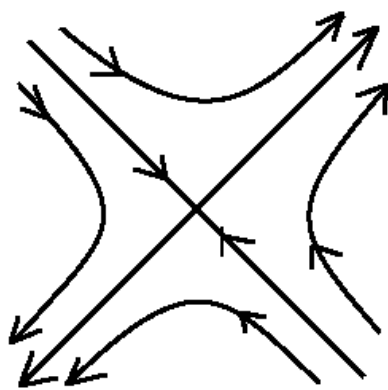
I jedan i drugi slučaj dijele se na podslučajeve ovisno o njihovoj matrici sustava, te svaki od tih podslučajeva ima karakterističnu vrstu ravnotežne točke koja je specifična za njega.

### **2.3.1 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednadžbe realna i različita: $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$**

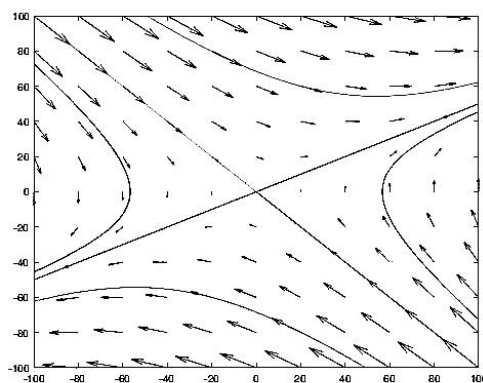
Sustavi koji zadovoljavaju uvjet pod (7) dalje se dijele na sustave koji su karakteristični s obzirom na karakter (vrstu) njihove ravnotežne točke:

1. (Sedlo) Sustav kod kojeg je jedno rješenje karakteristične jednadžbe veće od nule, a drugo manje od nule, odnosno:

$$ad - bc < 0. \quad (10)$$



(a)



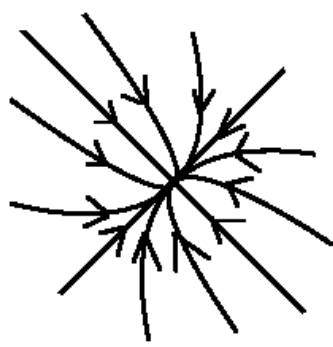
(b)

Slika 6. Fazni portret sedla ((a) shema; (b) za sustav  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ) - neke

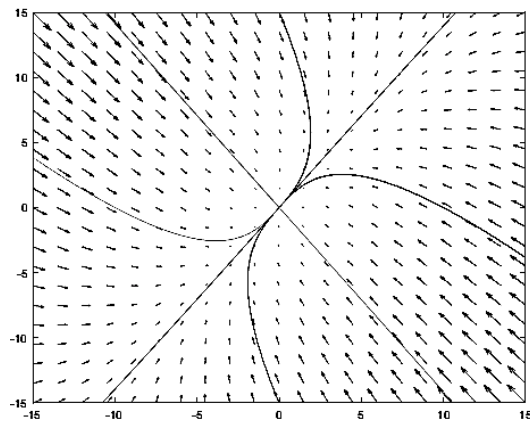
trajektorije idu prema ravnotežnoj točki, a većina se udaljava od nje

2. (Ponor - čvor) Sustav kod kojeg su oba rješenja karakteristične jednadžbe manja od nule, odnosno:

$$ad - bc > 0 \text{ i } a + d < 0 \quad (11)$$



(a)



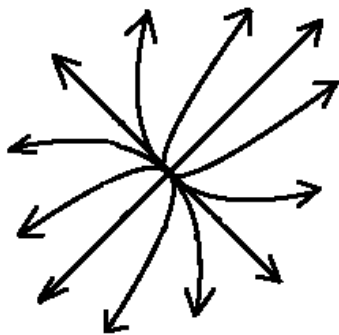
(b)

Slika 7. Fazni portret ponora - čvor ((a) shema; (b) za sustav  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ) -

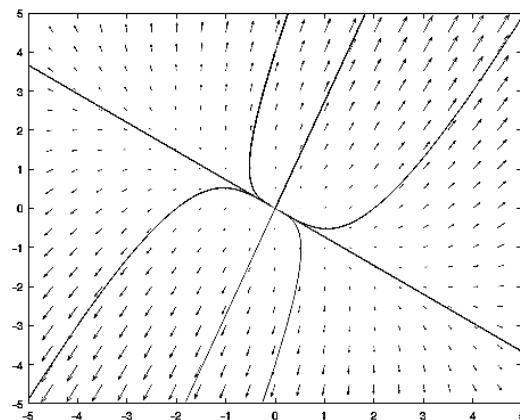
trajektorije prilaze ravnotežnoj točki

3. (Izvor - čvor) Sustav kod kojeg su oba rješenja karakteristične jednačbe veća od nule, odnosno:

$$ad - bc > 0 \text{ i } a + d > 0 \quad (12)$$



(a)



(b)

Slika 8. Fazni portret izvora (čvor) ((a) shema; (b) za sustav  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ) -

trajektorije se udaljavaju od ravnotežne točke

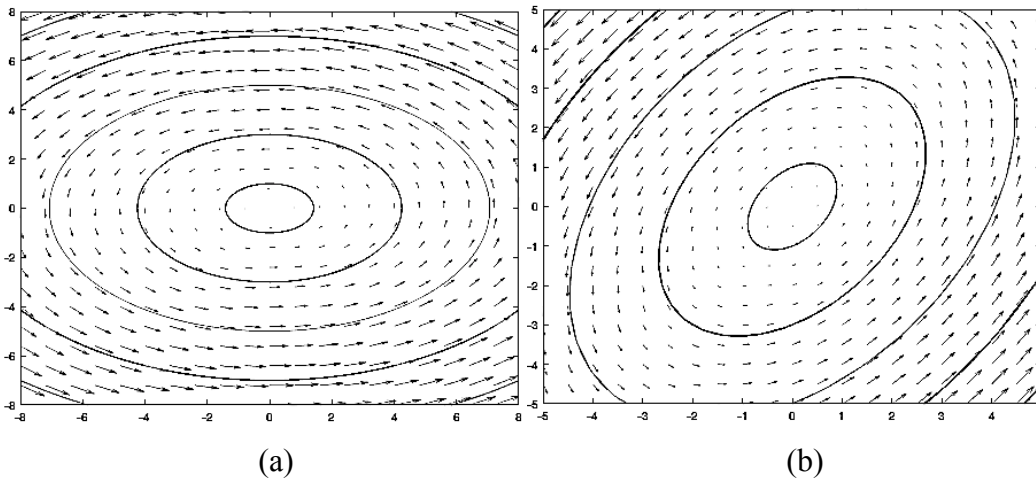


**2.3.2 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednađbe kompleksno konjugirani brojevi:  $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$**

Sustavi koji zadovoljavaju uvjet (8) dalje se dijele na sustave koji su karakteristični s obzirom na karakter (vrstu) njihove ravnotežne točke:

1. (Središte) Sustav kojem je realna komponenta rješenja karakteristične jednađbe jednaka nuli, odnosno:

$$a + d = 0. \quad (13)$$

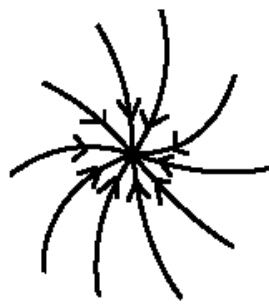


Slika 9. Fazni portret središta ((a) za sustav  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; (b) za sustav  $A =$

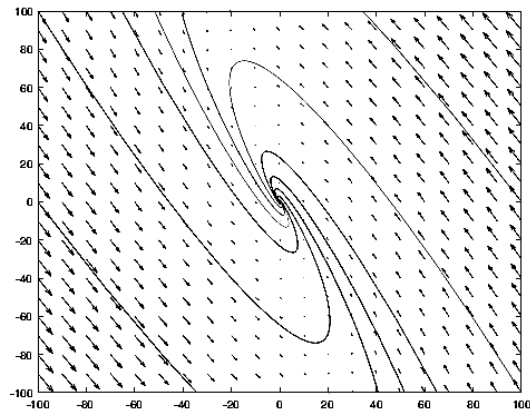
$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ) - trajektorije su elipse kod kojih se rješenja ponavljaju periodično

2. (Ponor - žarište) Sustav kojem je realna komponenta rješenja karakteristične jednađbe manja od nule, odnosno:

$$a + d < 0. \quad (14)$$



(a)



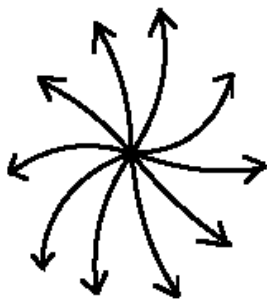
(b)

Slika 10. Fazni portret ponora (žarište) ((a) shema; (b) za sustav  $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ) -

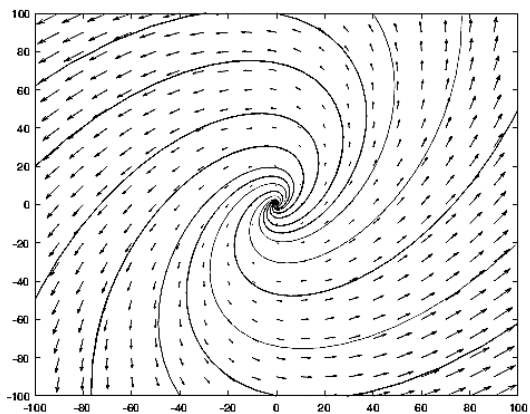
trajektorije su spirale koje prilaze ravnotežnoj točki

3. (Izvor - žarište) Sustav kojem je realna komponenta rješenja karakteristične jednačbe veća od nule, odnosno:

$$a + d > 0. \quad (15)$$



(a)



(b)

Slika 11. Fazni portret izvora (žarište) ((a) shema; (b) za sustav  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ ) -

trajektorije su spirale koje se udaljavaju od ravnotežne točke

## 3. PREGLEDNI DIO

### 3.1 Rješavanje sustava i grafički prikaz dobivenih rješenja

Za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi (4) koristit će se programski paket *Matlab* uz odgovarajući *Symbolic Math Toolbox*. Kod preko kojeg će se sustavi rješavati bit će isti kroz sve primjere, a temelji se na simboličkom rješavanju sustava diferencijalnih jednadžbi.

Prije svega potrebno je definirati vrijednosti konstanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  odgovarajuće matrice sustava, a zatim se  $x(t)$  i  $y(t)$  definiraju kao simboličke funkcije:

```
syms x(t) y(t)
```

Nakon toga definirat će se njihova prva derivacija uz prethodno definirane konstante:

```
ode1=diff(x)==a*x+b*y;
```

```
ode2=diff(y)==c*x+d*y;
```

Sustav jednadžbi zapisat će se u matričnom obliku:

```
odes=[ode1;ode2];
```

Sustav jednadžbi rješava se preko funkcije *dsolve* te se istovremeno rješenje definira kao:

```
[xSol(t),ySol(t)]=dsolve(odes)
```

Nakon što su rješenja sustava diferencijalne jednadžbe definirana, potrebno je definirati i početne uvjete,  $x(0)$  i  $y(0)$ , a koji su nužni za dobivanje numeričkog rješenja, što se čini sljedećim slijedom naredbi uz definirane početne uvjete:

```
cond1=x(0)==x0;
```

```
cond2=y(0)==y0;
```

```
conds=[cond1;cond2];
```

```
[xSol(t),ySol(t)]=dsolve(odes,conds);
```

Da bi se dobio grafički prikaz ovisnosti  $x$  i  $y$  o  $t$ , koristi se sljedeći slijed naredbi nakon kojeg iskače poseban prozorčić s željenim grafičkim prikazom:

```
fplot(xSol);
hold on;
fplot(ySol)
```

Za dobivanje trajektorije sustava, potrebno je definirati  $t$ , a konačno korištenjem funkcije *fplot* dobiva se željeni grafički prikaz:

```
fplot(xSol,ySol,[0,t])
```

Fazni portret će se dobivati uzastopnim crtanjem krivulja različitih i nasumično odabranih početnih uvjeta u vremenskom intervalu  $[-t, t]$  sustava istih koeficijenata. Kao i što se crtaju pojedine trajektorije, crtaju se i pojedine krivulje faznog portreta, a konačno se uz krivulje dodaje pripadno vektorsko polje ili polje smjerova.

Ako je potrebno vektorsko polje ili polje smjerova, simboličke se vrijednosti moraju zamijeniti numeričkim vrijednostima, te upotrebom funkcije *quiver* dobiti odgovarajuće polje na prethodno napravljenom grafu. Koristi se sljedeći slijed naredbi da bi se to ostvarilo, a u kojem je  $VP$  definirana proizvoljno odabranom pozitivnom vrijednošću, a srednji član (u ovom slučaju  $VP/10$ ), proizvoljno odabran pozitivan broj:

```
u = a*x+b*y;
v = c*x+d*y;
[X, Y] = meshgrid(-VP:(VP/10):VP,-VP:(VP/10):VP);
U = subs(u, [x y], {X,Y});
V = subs(v, [x y], {X,Y});
quiver(X, Y, U, V)
```

Za dobivanje polja smjerova sličan je slijed naredbi, osim što se vrijednosti normiraju, a time i duljina vektora na konačnom prikazu:

```
u = a*x+b*y;
v = c*x+d*y;
[X, Y] = meshgrid(-VP:(VP/10):VP,-VP:(VP/10):VP);
U = subs(u, [x y], {X,Y});
```

```

V = subs(v, [x y], {X,Y});
Un=U./sqrt(U.^2+V.^2);
Vn=V./sqrt(U.^2+V.^2);
U=Un;
V=Vn;
quiver(X, Y, U, V)

```

### 3.2 Odabir parametara

Kroz rad spomenuto je šest karakterističnih dvodimenzijskih linearnih dinamičkih sustava. Svaki pojedini sustav riješen u ovom radu promatrat će se u kontekstu takvih karakterističnih sustava, te će se odabirati parametri koji daju željeni rezultat, odnosno predstavljaju jednu od spomenutih skupina.

#### 3.2.1 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednadžbe realna i različita: $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$

Metodom isprobavanja nasumičnim odabirom početnih parametara traži se primjer koji zadovoljava uvjete (7) i (10). Jedan od primjera za koji jednakost vrijedi je:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za konkretan primjer i za analogne primjere unutar ove skupine, crtat će se dvije trajektorije kod kojih je početni uvjet  $X_0 = V$ , i nekoliko nasumično odabranih trajektorija. Svojtveni vektori računaju se pomoću sustava jednadžbi (6) i (9). U ovom primjeru, jedan izbor svojstvenih vektora je:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ponovno se metodom isprobavanja traži odgovarajuća koeficijentna matrica za uvjete (7) i (11), a jedan od primjera koji odgovara zadanim uvjetima je:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

U ovom primjeru, jedan izbor svojstvenih vektora je:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Metodom isprobavanja nasumičnim odabirom početnih parametara traži se primjer koji zadovoljava uvjete (7) i (10). Jedan od primjera za koji jednakost vrijedi je:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

U ovom primjeru, jedan izbor svojstvenih vektora je:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### **3.2.2 Sustavi kod kojih su rješenja karakteristične jednadžbe kompleksno konjugirani brojevi: $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$**

Metodom isprobavanja nasumičnim odabirom početnih parametara traži se primjer koji zadovoljava uvjete (7) i (10). Jedan od primjera za koji jednakost vrijedi je:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Metodom isprobavanja nasumičnim odabirom početnih parametara traži se primjer koji zadovoljava uvjete (7) i (10). Jedan od primjera za koji jednakost vrijedi je:

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -6,5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Metodom isprobavanja nasumičnim odabirom početnih parametara traži se primjer koji zadovoljava uvjete (7) i (10). Jedan od primjera za koji jednakost vrijedi je:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -12,2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 4. REZULTATI I RASPRAVA

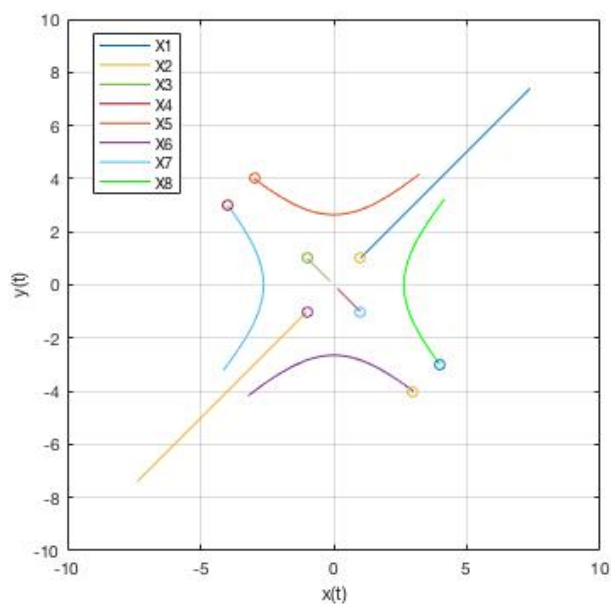
### 4.1 Sedlo

Rezultati se odnose na sustav opisan matricom:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jednadžba koje su dobivene kao rješenje takvog sustava u *Matlab*-u preko zadanog koda su  $x_{Sol}(t) = C_1 * \exp(t) - C_2 * \exp(-t)$  i  $y_{Sol}(t) = C_1 * \exp(t) + C_2 * \exp(-t)$ .

S obzirom na jednadžbu, s porastom vremena jedan ekvivalentni eksponencijalni član u obje funkcije  $x(t)$  i  $y(t)$  nužno dominira te iščezava u polupravac koji izvire iz ishodišta ili ponire u njega. Što su veće apsolutne vrijednosti konstanti  $C_1$  i  $C_2$ , krivulje koje odgovaraju rješenju sustava jednadžbi bit će to udaljenije od ishodišta. Analogno se očekuje za sve slučajeve u kojima su rješenja karakteristične jednadžbe realna i različita.



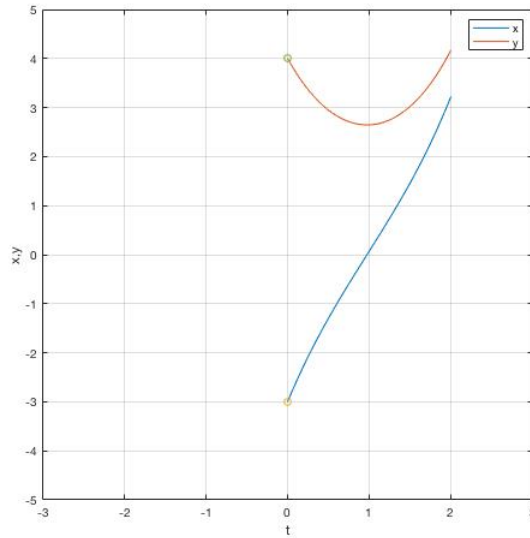
Slika 12. Trajektorije sustava  $A_1$  uz početne uvjete  $X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$X_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_4(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_5(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, X_6(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$X_7(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, X_8(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ i vremenski interval } [0, 2]$$

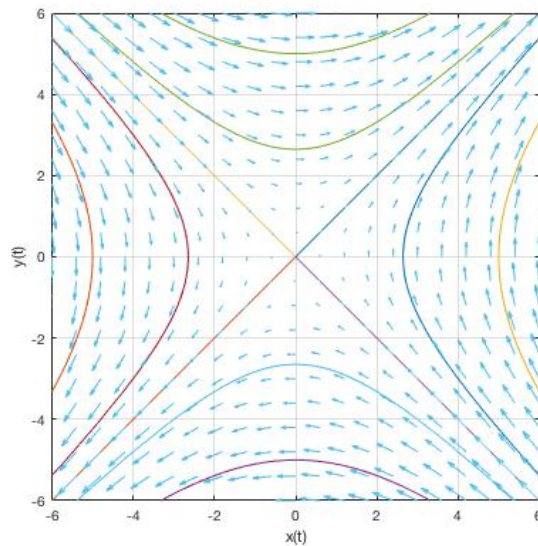
Iz trajektorija se može zaključiti da u dijelu polja u kojem se rješenja približavaju ishodištu, tj. ravnotežnoj točki sustava, promjena jedne i druge varijable po vremenu  $t$  se smanjuje, a kada se udaljavaju od ishodišta, promjena se povećava. Kada početna točka trajektorije leži na pravcu na kojem leže i svojstveni vektori, tada je trajektorija pravčasta.





Slika 13. Ovisnost  $x$  i  $y$  o  $t$  sustava  $A_1$  uz početne uvjete  $x(0) = -3$  i  $y(0) = 4$  i vremenski interval  $[0, 2]$

Kao što je vidljivo, član pojedinih funkcija  $x(t)$  i  $y(t)$ ,  $e^{-t}$ , naglo iščezava, a jedini preostali član koji ostaje primjetan je  $e^t$ , pa krivulja poprima karakterističan oblik eksponencijalne funkcije.



Slika 14. Fazni portret sustava  $A_1$  (sedlo)

Konačno, fazni portret opisuje cjelokupno polje sustava u zadanim granicama, te se vide karakteristične krivulje sedla. Krivulje se gotovo linearno približavaju ishodištu iz  $t = -\infty$ , pa se u kratkom vremenskom intervalu, ovisno o početnim uvjetima, naglo zakrivljuju i udaljavaju od ishodišta, i približavaju se polupravcu koji izvire iz ishodišta, a koji leži na istome pravcu kao i jedan svojstveni vektor sustava.

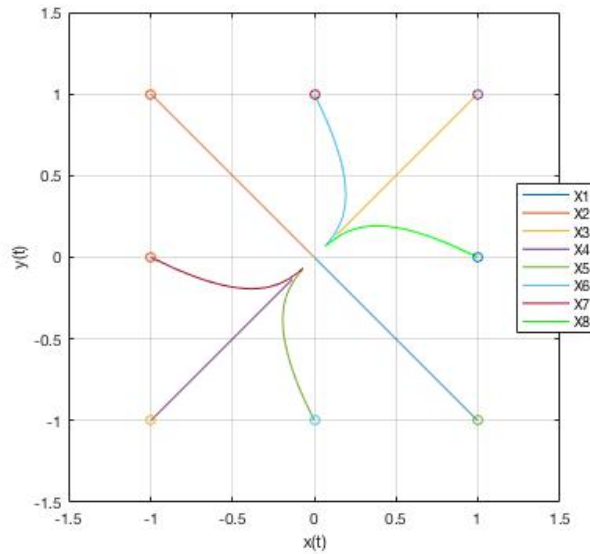
## 4.2 Ponor

Rezultati se odnose na sustav opisan matricom:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jednadžba koje su dobivene kao rješenje takvog sustava u *Matlab*-u preko zadanog koda su  $x_{\text{Sol}}(t) = C_2 \cdot \exp(-t) - C_1 \cdot \exp(-3 \cdot t)$  i  $y_{\text{Sol}}(t) = C_2 \cdot \exp(-t) + C_1 \cdot \exp(-3 \cdot t)$ .

S obzirom na negativan predznak eksponenta oba eksponencijalna člana funkcije, očekuje se karakteristični *ponor* s vremenom koji teži k ishodištu za ovakav tip sustava.

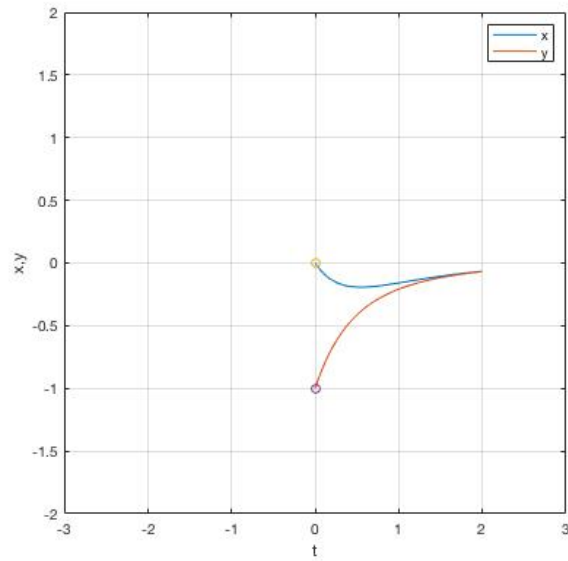


Slika 15. Trajektorije sustava  $A_2$  uz početne uvjete  $X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

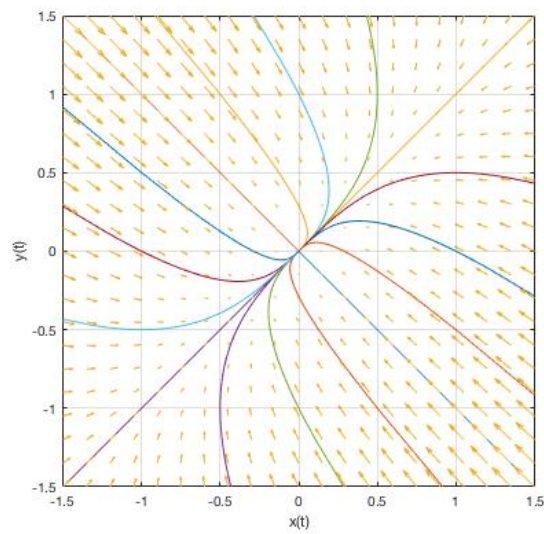
$$X_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_4(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_5(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_6(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X_7(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_8(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i vremenski interval } [0, 2]$$

Kao što je vidljivo i očekivano, sve trajektorija poniru prema ravnotežnoj točki, a trajektorije kod kojih su početne točke na istome pravcu kao i svojstveni vektori sustava, pravčaste su.



Slika 16. Ovisnost  $x$  i  $y$  o  $t$  sustava  $A_2$  uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $y(0) = -1$  i vremenski interval  $[0,2]$



Slika 17. Fazni portret sustava  $A_2$  (ponor)

Iz slike se vidi da sva rješenja poniru prema ishodištu, što je očekivano za ovakav tip sustava.

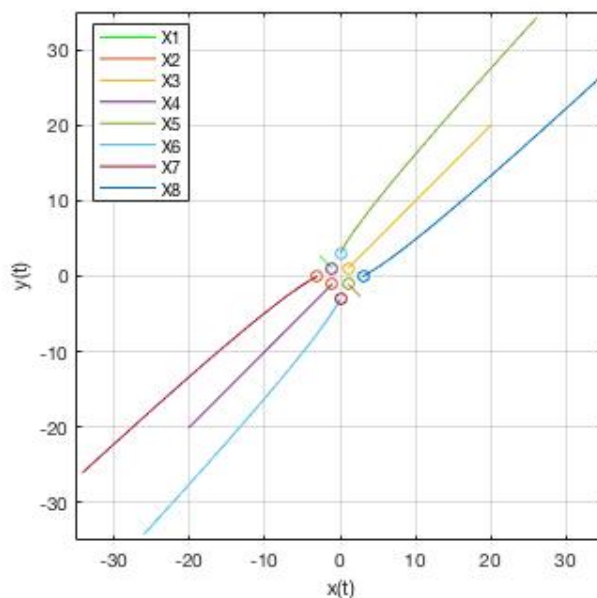
### 4.3 Izvor

Rezultati se odnose na sustav opisan matricom:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jednadžba koje su dobivene kao rješenje takvog sustava u *Matlab*-u preko zadanog koda su  $xSol(t) = C2*exp(3*t) - C1*exp(t)$  i  $ySol(t) = C1*exp(t) + C2*exp(3*t)$ .

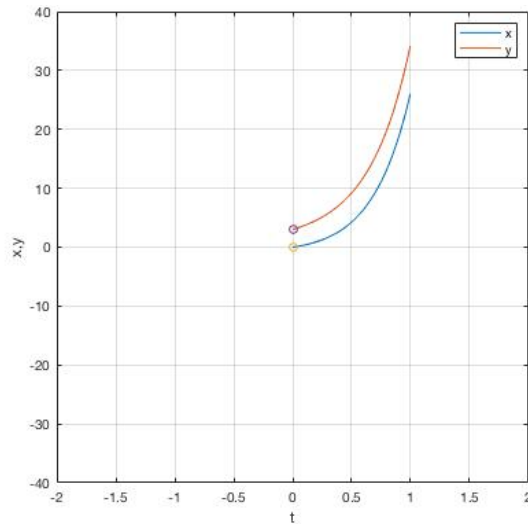
Dobivena jednadžba ekvivalentna je jednadžbi iz prethodnog slučaja, odnosno prije svega se razlikuje po smjeru promjene.



Slika 18. Trajektorije sustava  $A_3$  uz početne uvjete  $X_1(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

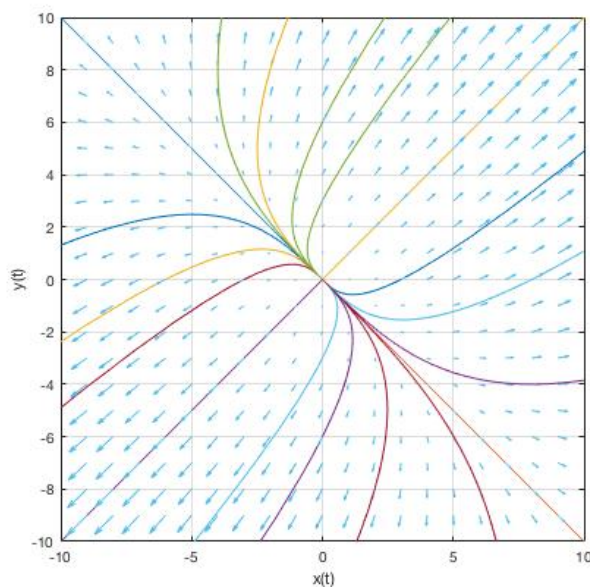
$$X_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_4(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_5(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, X_6(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$X_7(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, X_8(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i vremenski interval } [0,1]$$



Slika 19. Ovisnost  $x$  i  $y$  o  $t$  sustava  $A_3$  uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $y(0) = 1$  i vremenski interval  $[0, 1]$

Za razliku od prethodnog sustava,  $x$  i  $y$  s porastom  $t$  naglo rastu, a što je utjecaj pozitivnog predznaka eksponenta  $e^{3t}$ . Također je lako uočljivo kako će eksponencijalni član  $e^t$  samo vidljiv pri niskim vrijednostima  $t$  te neće imati znatan relativan doprinos.



Slika 20. Fazni portret sustava  $A_3$  (izvor)

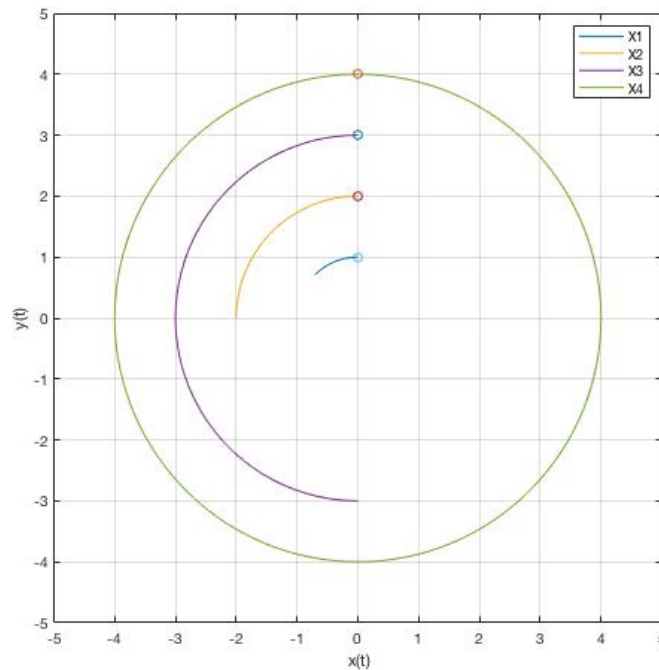
## 4.4 Središte

Rezultati se odnose na sustav opisan matricom:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

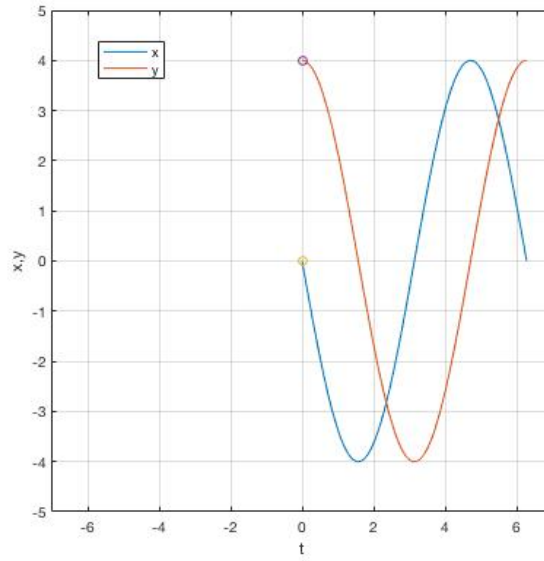
Jednadžba koje su dobivene kao rješenje takvog sustava u *Matlab*-u preko zadanog koda su  $x_{\text{Sol}}(t) = -C_2 \cos(t) - C_1 \sin(t)$  i  $y_{\text{Sol}}(t) = C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t)$ .

S obzirom da su  $C_1$  i  $C_2$  konstantne za zadane početne uvjete, a funkcije sinus i kosinus imaju jednak period, rješenja će se nužno periodično ponavljati, tj.  $X(t_0 + 2\pi n) = X(t_0)$ , pri čemu je  $n$  cijeli broj.



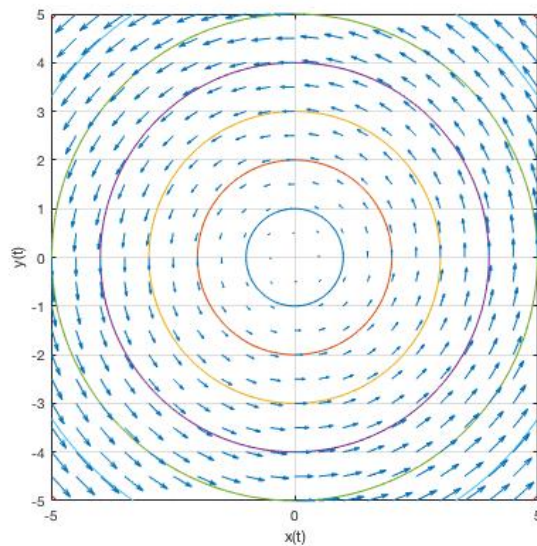
Slika 21. Trajektorije sustava  $A_4$  uz početne uvjete  $X_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$  i vremenski interval

$$[0, 2^{n-3}\pi], \text{ za } n \in \{1, 2, 3, 4\}$$



Slika 22. Ovisnost  $x$  i  $y$  o  $t$  sustava  $A_4$  za početni uvjet  $x(0) = 0$  i  $y(0) = 4$  i vremenski interval  $[0, 2\pi]$

Iz slike se da zaključiti da se rješenja za zadani sustav ponavljaju periodično za svaki  $2\pi$ .



Slika 23. Fazni portret sustava  $A_4$  (centar)



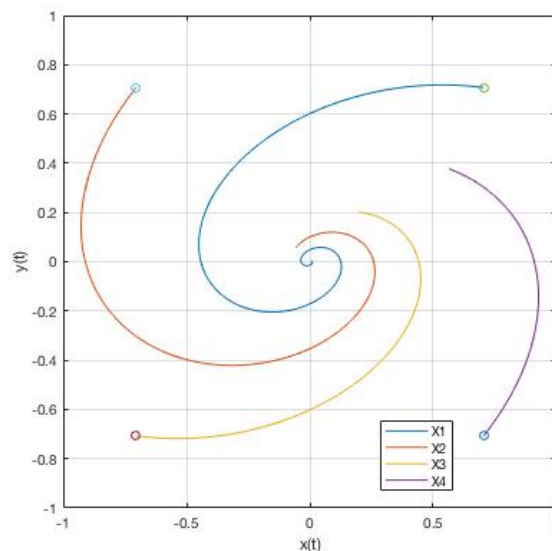
## 4.5 Ponor - žarište

Rezultati se odnose na sustav opisan matricom:

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -6,5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

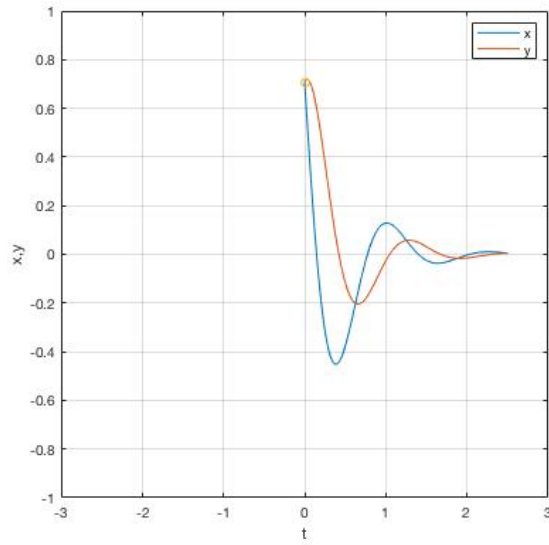
Jednadžba koje su dobivene kao rješenje takvog sustava u *Matlab*-u preko zadanog koda su  $xSol(t) = C1*((\cos(5*t)*\exp(-2*t))/4 - (5*\sin(5*t)*\exp(-2*t))/4) - C2*((5*\cos(5*t)*\exp(-2*t))/4 + (\sin(5*t)*\exp(-2*t))/4)$  i  $ySol(t) = C1*\cos(5*t)*\exp(-2*t) - C2*\sin(5*t)*\exp(-2*t)$ .

Iz jednadžbe se lako zaključuje da će se krivulja porastom vremena urušavati u ishodište.

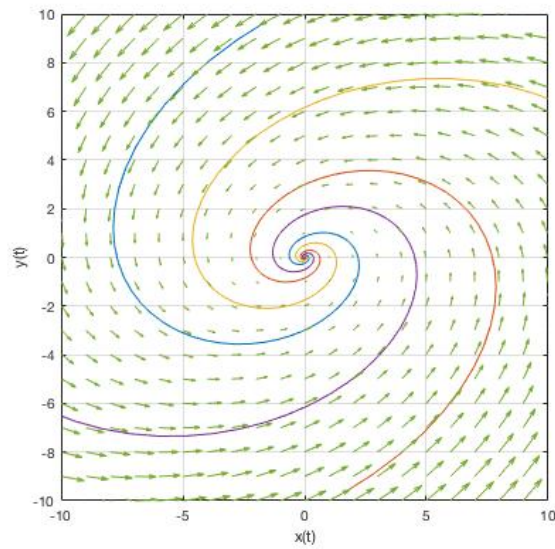


Slika 24. Trajektorije sustava  $A_5$  uz početne uvjete  $X_n = \begin{pmatrix} \sin(\pi(3/2 - n)/2) \\ \cos(\pi(3/2 - n)/2) \end{pmatrix}$  i

vremenski interval  $[0, 2^{3-n}\pi/5]$  za  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$



Slika 25. Ovisnost  $x$  i  $y$  o  $t$  sustava  $A_5$  uz početne uvjete  $x(0) = \sqrt{2}/2, y(0) = \sqrt{2}/2$  i vremenski interval  $[0, 4\pi/5]$



Slika 26. Fazni portret sustava  $A_5$  (spiralni ponor)

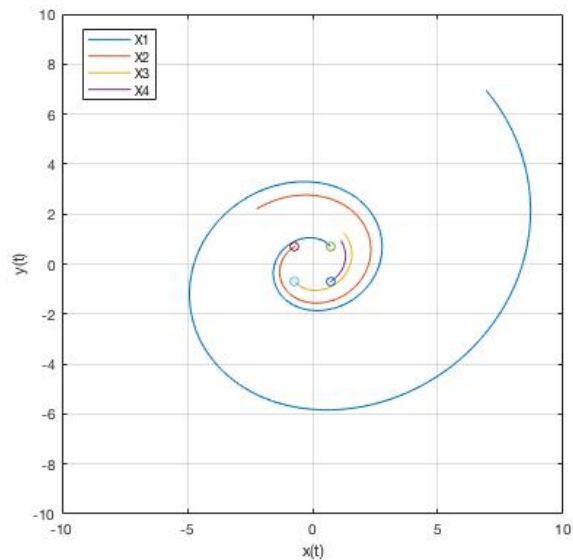
#### 4.6 Izvor - žarište

Rezultati se odnose na sustav opisan matricom:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -12,2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednadžba koje su dobivene kao rješenje takvog sustava u *Matlab*-u preko zadanog koda su  $xSol(t) = C1*((\cos(11*t)*\exp(2*t))/10 - (11*\sin(11*t)*\exp(2*t))/10) - C2*((11*\cos(11*t)*\exp(2*t))/10 + (\sin(11*t)*\exp(2*t))/10)$  i  $ySol(t) = C1*\cos(11*t)*\exp(2*t) - C2*\sin(11*t)*\exp(2*t)$ .

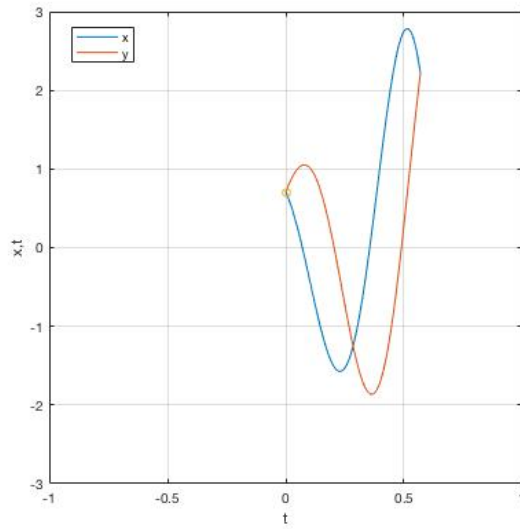
Fazni portret spiralnog izvora trebao bi biti analogan faznom portretu spiralnog ponora, s osnovnom razlikom u inverznoj ovisnosti o vremenu.



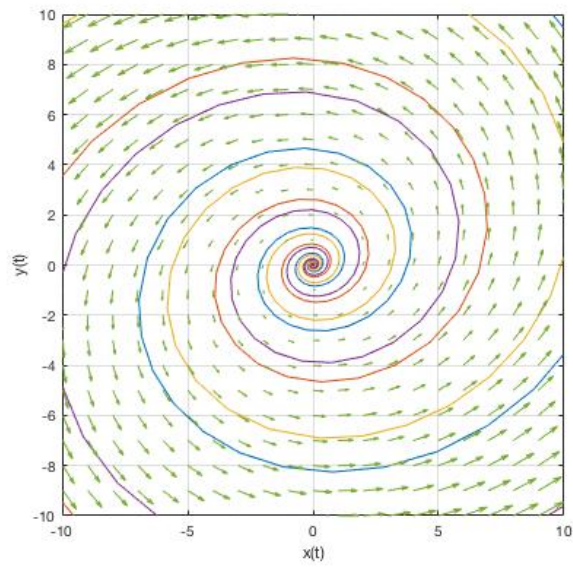
Slika 27. Trajektorije sustava  $A_6$  uz početne uvjete  $X_n = \begin{pmatrix} \sin(\pi(3/2 - n)/2) \\ \cos(\pi(3/2 - n)/2) \end{pmatrix}$  i

vremenski interval  $[0, 2^{2-n}\pi/11]$  za  $n \in \{1,2,3,4\}$

Prema trajektorijama ovoga i prethodnog sustava, uočava se kako se rješenja periodično vraćaju na isti polupravac koji izvire iz ishodišta.



Slika 28. Ovisnost  $x$  i  $y$  o  $t$  sustava  $A_6$  uz početne uvjete  $x(0) = \sqrt{2}/2, y(0) = \sqrt{2}/2$  i vremenski interval  $[0, 2\pi/11]$



Slika 29. Fazni portret sustava  $A_6$  (spiralni izvor)

## 5. ZAKLJUČAK

*Matlab* s dodatkom *Symbolic Math Toolbox*-a vrlo je moćan programski paket preko kojega se ovakvi jednostavni sustavi diferencijalnih jednadžbi vrlo lako rješavaju i grafički opisuju, i svi su rezultati bili u potpunosti u skladu s teorijskim spoznajama o takvim sustavima.

## 6. LITERATURA

1. Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L., *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*, Second Edition, Academic Press, USA, 2004., 21-49.
2. Sontag, E. D., *Lecture Notes on Mathematical Systems Biology*, Northeastern University, 2018., 40-45., 48-50.
3. Strogatz, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, 2018., 125-181.
4. <http://matematika.fkit.hr/> (pristup 17. kolovoza 2018.)
5. <https://uk.mathworks.com/> (pristup 17. kolovoza 2018.)

## 7. PRILOZI

Kod:

```
%Rjesavanje sustava diferencijalnih jednadzbi i crtanje grafova
clc
clear all
'Rjesavanje sustava diferencijalnih jednadzbi oblika dx/dt=a*x+b*y i
dy/dt=c*x+d*y i crtanje grafova'
a=input('a=');
b=input('b=');
c=input('c=');
d=input('d=');
clc
syms x(t) y(t)
```

```

ode1=diff(x)==a*x+b*y;
ode2=diff(y)==c*x+d*y;
odes=[ode1;ode2];
Uvjet1=input('Trebali ispisati rjesenje diferencijalne jednadzbe
(1=DA, 0=NE)?');
    if Uvjet1==1
        [xSol(t),ySol(t)]=dsolve(odes)
    elseif Uvjet1==0
        [xSol(t),ySol(t)]=dsolve(odes);
    else return
    end
Uvjet2=input('Trebali crtati traktoriju (1), ovisnost x,y o t (2)
ili fazni portret (3)?');
clc
if Uvjet2==3
    Uvjet3=1;
    i=input('Koliko pocetnih tocaka ce se koristiti za fazni portret?
(1,2,3...)');
    for j=1:1:i
        x0=input('x0=');
        y0=input('y0=');
        cond1=x(0)==x0;
        cond2=y(0)==y0;
        conds=[cond1;cond2];
        [xSol(t),ySol(t)]=dsolve(odes,conds);
        t=10;
        fplot(xSol,ySol,[-t,t])
        hold on
        syms t
    end
elseif Uvjet2==1
    Uvjet3=0;
    x0=input('x0=');
    y0=input('y0=');
    cond1=x(0)==x0;
    cond2=y(0)==y0;
    conds=[cond1;cond2];
    [xSol(t),ySol(t)]=dsolve(odes,conds);
    t=input('t=');
    fplot(xSol,ySol,[0,t])
    hold on
elseif Uvjet2==2
    Uvjet3=0;
    x0=input('x0=');
    y0=input('y0=');
    cond1=x(0)==x0;
    cond2=y(0)==y0;
    conds=[cond1;cond2];
    [xSol(t),ySol(t)]=dsolve(odes,conds);
    t=input('t=');
    fplot(xSol,[-t,t]);
    hold on;
    fplot(ySol,[-t,t])
else return
end
if Uvjet3==1
    Uvjet4=input('Trebali se dodati vektorsko polje (1) ili polje
smjera (2)?');
    if Uvjet4==1
        u = a*x+b*y;
        v = c*x+d*y;
        if Xaxis>Yaxis
            VP=Xaxis;

```

```

else
    VP=Yaxis;
end
[X, Y] = meshgrid(-VP:(VP/10):VP,-VP:(VP/10):VP);
U = subs(u, [x y], {X,Y});
V = subs(v, [x y], {X,Y});
if Uvjet4==2
    Un=U./sqrt(U.^2+V.^2);
    Vn=V./sqrt(U.^2+V.^2);
    U=Un;
    V=Vn;
end
quiver(X, Y, U, V)
clc
end
end
grid on

```

## 8. ŽIVOTOPIS

[REDACTED] Prva tri razreda osnovne škole sam završio u TS Ackermätteli, a potom sljedećih pet razreda završio u OŠ Vukovini. Upisao sam opću gimnaziju u Gimnaziji Velika Gorica i maturirao 2013. godine, kada sam i upisao preddiplomski studij primijenjene kemije na Fakultetu kemijskog inženjerstva i tehnologije u Zagrebu.