Kompleksni brojevi

Majsec, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ

Filip Majsec

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, rujan 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ

Filip Majsec

KOMPLEKSNI BROJEVI

ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada: Miroslav Jerković, doc.dr.sc.

Članovi ispitnog povjerenstva:

doc. dr. sc. Miroslav Jerković

prof. dr. sc. Ivica Gusić

prof. dr. sc. Irena Škorić

Zagreb, rujan 2018.

ZAHVALA

Zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Miroslavu Jerkoviću na pomoći i savjetima pri izradi ovog rada te mojoj obitelji i prijateljima na podršci.

SAŽETAK

Kompleksni brojevi

Brojevi nam koriste u opisivanju svijeta koji nas okružuje. Kompleksni brojevi se pojavljuju kao logično proširenje skupa realnih brojeva i samim time zaslužuju pažnju. Napretkom shvaćanja našeg okruženja dolazimo do poteškoća u opisivanju složenih pojava, kakve susrećemo u znanosti i inženjerstvu. Pokazuje da se kompleksni brojevi, koliko se god isprva apstraktni i nerazumljivi činili, itekako imaju primjenu, često u vrlo različitim kontekstima i situacijama. U ovom radu ćemo kroz tri poglavlja proći kroz povijest, matematičku pozadinu i primjenu kompleksnih brojeva.

Ključne riječi: kompleksni brojevi, imaginarna jedinica, algebarske operacije, trigonometrijski zapis

ABSTRACT

Complex numbers

We use numbers to describe the world that surrounds us. Complex numbers appear as the logical extension of the set of real numbers and just by that notion they deserve attention. With the advancement of our understanding of our environment, we come to difficulties in describing the complex phenomena we encounter in science and engineering. It appears that complex numbers, as much as abstract and incomprehensible they may seem at first, are really necessary in applications, often in broadly various contexts and situations. In this paper, we will pass through three chapters: history, mathematical background and the application of complex numbers.

Key words: complex numbers, imaginary unit, algebraic operations, trigonometric form

Sadržaj

1. UVOD

Suvremeni svijet je nezamisliv bez brojeva. Brojevi se koriste u gotovo svim ljudskim djelatnostima, od poljoprivrede do informatike. Praljudi su koristili brojeve prije nego što su izumili pismo i pismene zapise tih brojeva. Sve antičke kulture su imale svoje načine zapisivanja brojeva dok se danas isključivo koriste arapske brojke. U početku su se brojevi koristili za nabrajanje, mjerenje i označavanje ali kako je ljudska rasa napredovala otkrivali su se novi načini korištenja brojeva. Na primjer, u prošlosti je bilo uobičajeno zanemarivati negativne rezultate izračuna jer nije postojala svijest o korisnosti takvih rezultata. Negativni brojevi su više ušli u primjenu putem trgovine ili bankarstva gdje su označavali neki dug ili nedostatak nečega. Poput negativnih brojeva pri računu su se pojavljivala rješenja koja za to vrijeme nisu imala smisla, to jest bila su preapstraktna da bi se spoznala kao točna. Jedan takav primjer su kompleksni brojevi. Za njih možemo reći da su imali višestoljetan i trnovit put od prvih naznaka njihova postojanja do konačnog prihvaćanja. Kompleksni brojevi predstavljaju „krovnu“ brojevnu strukturu našeg vremena, onu u kojoj se obavljaju sve bitne računske operacije i u kojoj se rješavaju sve relevantne jednadžbe, a koja u sebi sadrži čak i one nama najvažnije brojeve – realne brojeve. Naime, i njih možemo promatrati kao posebne slučajeve kompleksnih brojeva.

2. POVIJESNI RAZVOJ

Perzijski matematičar al-Khwarizmi u svojem djelu *Algebra* povezao je osnove matematičkog računa grčke i hinduističke matematike i tako udario temelj na kojem danas počiva svaki početak učenja matematike. U svojem djelu obradio je kvadratne jednadžbe različitih oblika pri čemu se ograničio samo na pozitivna rješenja. Pomoću latinskih prijevoda al-Khwarizmijeve *Algebre* Gerard od Cremone i Leonardo od Pize (poznatiji kao Fibonacci) predstavljaju Italiji algebarske metode, već prije poznate u arapskom svijetu. Oko 1225. godine kralj Frederik II. ugošćuje Fibonaccija na svojem dvoru u Siciliji gdje mu lokalni matematičari postavljaju probleme koje on rješava. Jedan od problema je bio naći rješenje kubne jednadžbe

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Općenita kubna jednadžba

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

može se reducirati do jednostavnijeg oblika

$$x^3 + px + q = 0$$

pomoću promjene varijable $x' = x - \frac{1}{3}a$. Ova promjena varijable se pojavljuje prvi puta u dva anonimna rada iz Firence s kraja 14. stoljeća. Ako se uvrštavaju samo pozitivi koeficijenti a i pozitivne vrijednosti x, dolazi se do tri tako zvana skraćena oblika kubne jednadžbe:

(1) $x^3 + px = q$

(2) $x^3 = px + q$

(3) $x^3 + q = px$

Jednadžbu (1) (i možda (2) i (3)) prvi je riješio Scipione del Ferro, profesor Sveučilišta u Bolonji, koji je 1526. (neposredno prije smrti) povjerio formulu svome učeniku Antoniu

Mariji Fioreu. Fiore je izazvao Tartagliu na matematičko sučeljavanje, koja su obično donosila nagradu u novcu, a ponekad i u vidu prestižnog mjesta na sveučilištu. Tartaglia je sumnjao da Fiore ima formulu za rješavanje kubne jednadžbe ali ju je i sam otkrio prije sučeljavanja, pobijedivši tako na sučeljavanju. Tartaglia je formulu, ne navodeći dokaz, pokazao Gerolamu Cardanu koji se obavezao na zavjet tajnosti. Cardano je iz formule uspio doći do dokaza, a naknadno je saznao da je del Feero prvi izveo tu formulu te je to potvrdio iz del Feerovih zapisa. Cardano je objavio formulu za sva tri oblika u svojem djelu *Ars Magna* (1545). U tom djelu Cardano je priznao da je dobio formulu od Tartaglije ali da je del Feero bio prvi koji ju je otkrio te da je Cardano sam došao do dokaza. Ovaj Cardanov postupak Tartaglija je okarakterizirao kao kršenje njihovog prijašnjeg dogovora o tajnosti te je tako počela jedna od najžešćih svađi u povijesti znanosti.

Slika 1. Cardano i Tartaglia

U formulama koje daju rješenje slučaja (1) od skraćenih oblika kubne jednadžbe ne pojavljuju se negativni bojevi pod korijenom. Međutim, kod slučaja (2) oni se pojavljuju. Ova činjenica je otežavala rješavanje i razumijevanje rješenja. Naime, supstitucijom $x = u + v$ u jednadžbu $x^3 = px + q$ dobiva se

$$x^3 - px = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) = q.$$

Ako je $3uv = p$ dobiva se $u^3 + v^3 = q$ i $u^3v^3 = (p/3)^3$, to jest poznati su suma i produkt dvije kubirane varijable. To znači da možemo napisati kvadratnu jednadžbu čija rješenja u^3 i v^3 a potom otuda možemo odrediti vrijednosti za *u* i *v*. Sada je:

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + w} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - w}$$

pri čemu je

$$w = \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 - (\frac{1}{3}p)^3}\ .$$

U slučaju kad je član pod gornjim korijenom negativan dobiva se takozvani *casus irreducibillis,* što Cardano u svojem djelu *Ars Magna* nije obradio, vjerojatno zato što se u tom slučaju ne može dobiti realna vrijednost za *w*.

Rafael Bombelli, talijanski matematičar, u svojem djelu *l'Algebra* (1572) predstavlja izraz $\sqrt{-1}$ i naziva ga "*più di meno*". U *l'Algebra* se obrađuje, između ostalog i tema kubiranja pri čemu Bombelli slijedi Cardanove misli ali dodaje dio gdje objašnjava *casus irreducibillis*. Bombelli u svojem djelu obrađuje jednadžbu

$$x^3 = 15x + 4$$

za koju Cardanova formula daje

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\ .$$

Bombelli uočava da jednadžba $x^3 = 15x + 4$ ima rješenje $x = 4$ te pokazuje zašto je gore napisano Cardanovo rješenje naprosto drugi način da se zapiše $x = 4$. Postavlja

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + bi$$

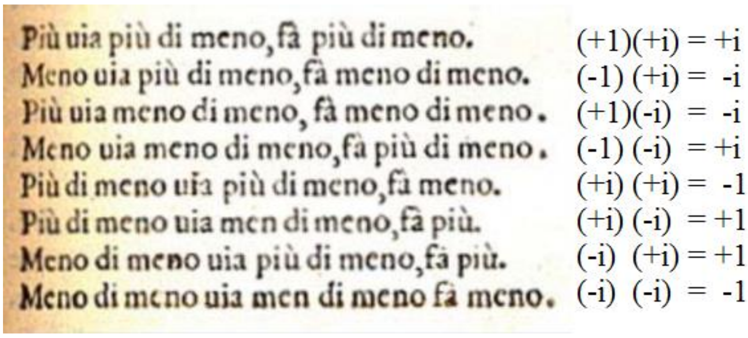
iz čega slijedi da je

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - bi\,.$$

Računajući s gornjim izrazima dobiva $a = 2, b = 1$ pa je

$$x = a + bi + a - bi = 2a = 4.$$

Time je Bombelli bio prvi koji je bio na tragu današnjeg modernog označavanja $\sqrt{-1}$ pomoću simbola i te osim realnih rješenja kubnih jednadžbi dobiva i ostala, do tada previđena, kompleksna rješenja.



Più uia più di meno, fà più di meno.	(+1)(+i) = +i
Meno uia più di meno, fà meno di meno.	(-1) (+i) = -i
Più uia meno di meno, fà meno di meno.	(+1)(-i) = -i
Meno uia meno di meno, fà più di meno.	(-1) (-i) = +i
Più di meno uia più di meno, fà meno.	(+i) (+i) = -1
Più di meno uia men di meno, fà più.	(+i) (-i) = +1
Meno di meno uia più di meno, fà più.	(-i) (+i) = +1
Meno di meno uia men di meno fà meno.	(-i) (-i) = -1

Slika 2. Dio iz Bombellijeve *l'Algebra*

René Descartes, francuski matematičar i filozof, u svojem djelu *La Géométrie* uključuje primjenu algebre na geometriju, iz čega je kasnije proizašla analitička (kartezijska) geometrija. On je prvi koji je upotrijebio pojam imaginarni prilikom opisivanja negativnih brojeva pod korijenom jer je smatrao da takve veličine ne mogu postojati (moguće ih je tek zamisliti tj. imaginirati):

„Za svaku jednadžbu možemo zamisliti toliko rješenja koliki je stupanj jednadžbe, ali u mnogim slučajevima nema veličine koja odgovara tome što je zamišljeno.“

Abraham de Moivre, francuski matematičar, 1698. spominje da je Isaac Newton dvadesetak godina prije koristio formulu koja je danas u malo izmijenjenom obliku poznata kao de Moivreov teorem:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Newton je, naime, koristio tu formulu pri računanju kubnih korijena koji se pojavljuju u Cardanovim formulama.

Švicarski matematičar Leonhard Euler uveo je zapis $i = \sqrt{-1}$ te vizualizaciji kompleksnih brojeva kao točki u pravokutnom koordinatnom sustavu. Uz to zaslužan je za dokaz identiteta

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

koji pomoću kompleksnih brojeva povezuje eksponencijalnu i trigonometrijske funkcije.

Prvi koji je koristio pojam „kompleksni broj“ bio je njemački matematičar Carl Friedrich Gauss. Međutim, Gauss izražava svoje nezadovoljstvo nazivom „imaginarna jedinica“, okrivljujući ga za stoljeća neprihvaćanja kompleksnih brojeva: „ Ako se ova tema do sada razmatrala s pogrešne točke gledišta i tako bila obavijena misterijom i okružena tamom, to je većinom zbog neprikladne terminologije koju treba kriviti. Da su $+1, -1$ i $\sqrt{-1}$, umjesto pozitivni, negativni i imaginarni, bili zvani izravno, inverzno i bočno jedinstvo, teško bi imali bilo koji opseg za takvu opskurnost.“

Kroz povijest kompleksni brojevi su predstavljali takozvano „trinaesto prase“, to jest uvijek su bili prisutni ali zbog složenosti i apstraktnosti često su bili previđeni ili smatrani pogreškom. Genijalni umovi koji su se susretali s njima polagano su pridonosili razvoju kompleksnih brojeva kao matematičkog pojma, doprinijevši shvaćanju da se čak i oni rezultati koji možda trenutno nemaju smisla ponekad trebaju uzeti na razmatranje. Razvojem matematike kao znanosti kompleksnim brojevima se davala sve veća pažnja pa su im se nalazile i sve veće primjene (vidi poglavlje 4.)

3. OPĆI DIO

3.1. DEFINICIJA KOMPLEKSNOG BROJA

Kompleksan broj z definira se kao uređeni par realnih brojeva x i y:

$$z = (x, y),$$

ili, u algebarskom zapisu:

$$z = x + yi,$$

gdje za imaginarnu jedinicu i vrijedi $i^2 = -1$. Realne brojeve x i y zovemo realni, odnosno imaginarni dio kompleksnog broja. Pri definiranju kompleksnih brojeva važno je napomenuti da *i* nije realan broj pošto kvadrat realnog broja ne može biti negativan.

Algebarski zapis kompleksnog broja je jedinstven, a to proizlazi iz činjenice da su dva kompleksna broja $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ jednaka ako imaju jednake realne dijelove te jednake imaginarne dijelove: $z_1 = z_2$ ako i samo ako vrijedi $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

3.2. ALGEBARSKE OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

Zbroj $z_1 + z_2$ dva kompleksna broja $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ iznosi

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

što se može izreći s "realni dio se zbraja s realnim, imaginarni s imaginarnim".

Umnožak $z_1 z_2$ kompleksnih brojeva jednak je

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

što se može izreći s "svaki dio kompleksnog broja se množi sa svakim dijelom drugog" (pri čemu vrijedi $i^2 = -1$).

Za množenje realnog i kompleksnog broja vrijedi sljedeće:

$$\lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda yi.$$

Za kompleksne brojeve kao i za realne, vrijede različita svojstva zbrajanja i množenja, poput komutativnosti:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ i } z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

asocijativnosti:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ i } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

i distributivnosti množenja prema zbrajanju:

$$z(z_1 + z_2) = z z_1 + z z_2.$$

Za kompleksan broj $z = x + yi$ kažemo da je broj $-z = -x - yi$ njemu suprotan kompleksan broj. Oduzimanje proizlazi iz zbrajanja ako ga promatramo kao zbrajanje sa suprotnim brojem:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Za svaki kompleksni broj $z \neq 0$ postoji njemu inverzan broj z^{-1} takav da vrijedi $zz^{-1} = 1$. Dijeljenje se može smatrati množenjem s inverznim brojem:

$$z_1 : z_2 = z_1 \frac{1}{z_2},$$

pri čemu je važno uzeti u obzir da se ne može dijeliti s nulom. Pri računu dijeljenja potrebno je i brojnik i nazivnik proširiti konjugiranim nazivnikom:

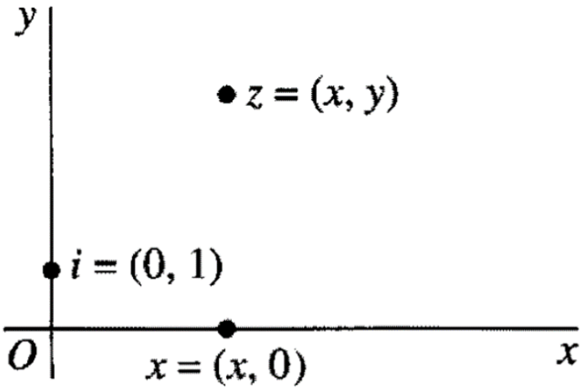
$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2},$$

čime se dobiva zbroj kvadrata u nazivniku i lako se vidi da konačan rezultat opet ima oblik kompleksnog broja.

3.3. GEOMETRIJSKO PREDOČAVANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Kompleksan broj predočavamo geometrijski u koordinatnoj ravnini koja se naziva kompleksna ravnina. U ovakvom prikazu realni dio kompleksnog broja nalazi se na *x*-osi a imaginarni dio se nalazi na *y*-osi, zbog čega *x*-os zovemo još i realna os, a *y*-os imaginarna os. Kompleksni broj $z = x + yi$ shvaćen kao uređen par realnih brojeva (x, y) prikazuje se kao jedna točka kompleksne ravnine (Slika 3).

Kompleksni brojevi $(x, 0)$ i $(0, y)$ posebni su slučajevi s obzirom na to da $(x, 0)$ leže na realnoj osi i ovako se mogu izraziti svi realni brojevi dok $(0, y)$ leže na imaginarnoj osi i nazivaju se čisto imaginarni.



Slika 3. Prikaz kompleksnog broja u kompleksnoj ravnini

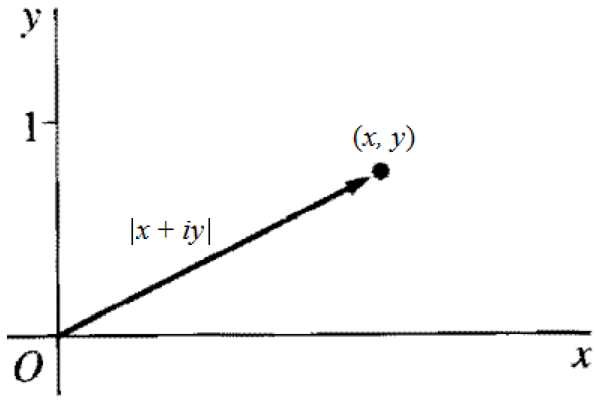
3.3.1. APSOLUTNA VRIJEDNOST KOMPLEKSNOG BROJA

Apsolutna vrijednost ili modul

$$|z| = |x + yi|$$

kompleksnog broja $z = x + yi$ je, geometrijski gledano, njegova udaljenost od ishodišta kompleksne ravnine (Slika 4). Brojčana vrijednost udaljenosti se dobiva iz Pitagorinog poučka:

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Slika 4. Modul kompleksnog broja

3.3.2. ZBROJ I RAZLIKA KOMPLEKSNIH BROJEVA

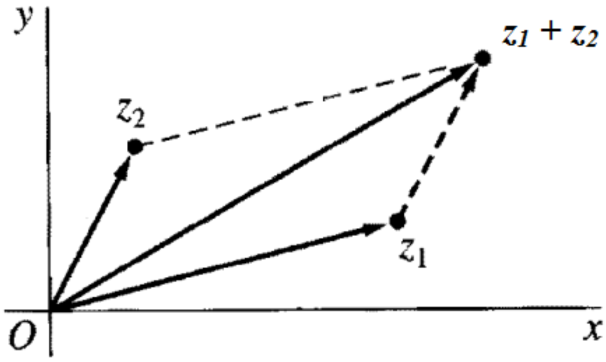
Prema definiciji, zbroj dva kompleksna broja $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ jest uređeni par

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

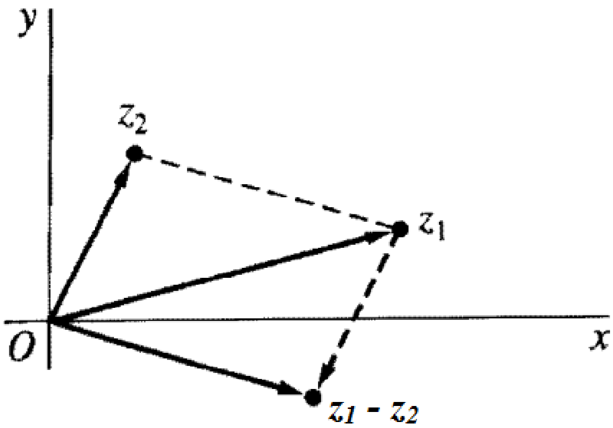
Ako se ta tri broja prikažu u kompleksnoj ravnini zajedno s ishodištem 0 = (0, 0), dobiva se paralelogram s vrhovima 0, z_1, z_2 i $z_1 + z_2$ pri čemu z_1 i z_2 te 0 i $z_1 + z_2$ čine dva para međusobno nasuprotnih vrhova (Slika 5).

Kod razlike međusobno nasuprotne vrhove paralelograma čine 0 i z_1 te z_2 i $z_1 - z_2$ (Slika 6).

U slučaju da oba kompleksna broja z_1 i z_2 leže na istom pravcu koji prolazi ishodištem tada su sva četiri broja na istom pravcu (degenerirani paralelogram).



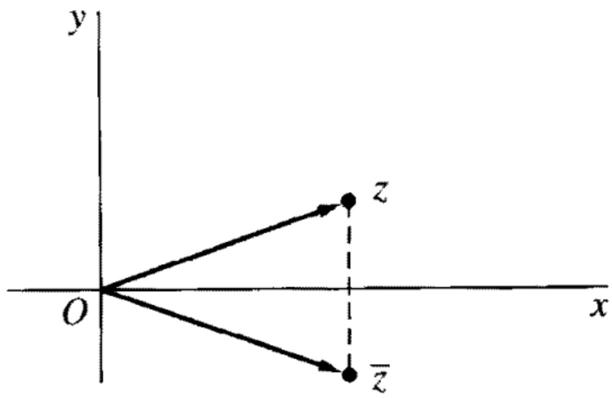
Slika 5. Zbroj kompleksnih brojeva



Slika 6. Razlika kompleksnih brojeva

3.3.3. KOMPLEKSNO KONJUGIRANI BROJEVI

Kompleksno konjugirani broj kompleksnog broja $z = x + yi$ definira se kao kompleksni broj $x - yi$ i označava se s $\overline{z}$. Kompleksni broj $\overline{z}$ predstavljen je točkom $(x, -y)$ koja je osno simetrična točci (x, y), koja predstavlja kompleksni broj z, s obzirom na x os (Slika 7).



Slika 7. Par međusobno konjugiranih kompleksnih brojeva

Za svaki z vrijedi $\bar{\bar{z}} = z$ i $|\bar{z}| = |z|$. Ako je $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ onda vrijedi

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

što znači da je kompleksno konjugirani broj zbroja jednak zbroju kompleksno konjugiranih brojeva. Analogne formule vrijede i za kompleksno konjugirani broj pridružen razlici, umnošku i kvocijentu kompleksnih brojeva. Još jedno važno svojstvo jest:

$$z\bar{z} = |z|^2,$$

koje se koristi u računu pri dijeljenju dva kompleksna broja (vidjeti kraj odlomka 3.2).

3.4. TRIGONOMETRIJSKI ZAPIS KOMPLEKSNOG BROJA

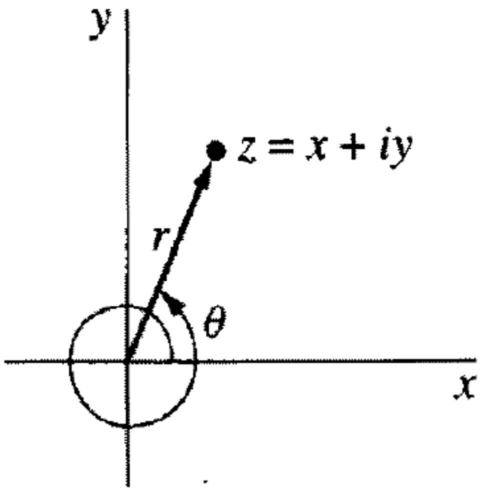
Kompleksni broj $z = x + yi$ može se zapisati u trigonometrijskom zapisu

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

pri čemu modul $|z|$ odgovara udaljenosti točke (x, y) od ishodišta koordinatnog sustava a θ je realni broj koji predstavlja veličinu kuta kojeg točka (x, y) zatvara s ishodištem (Slika 8). Vrijednost kuta θ može se odrediti iz jednadžbe $tan\ \theta = y/x$, pri čemu je važno u kojem se kvadrantu nalazi točka z. Kut θ naziva se argument ili kut kompleksnog broja z i označava se s $arg\ z$ te vrijedi:

$$\arg z = Arg\ z + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2\ ),$$

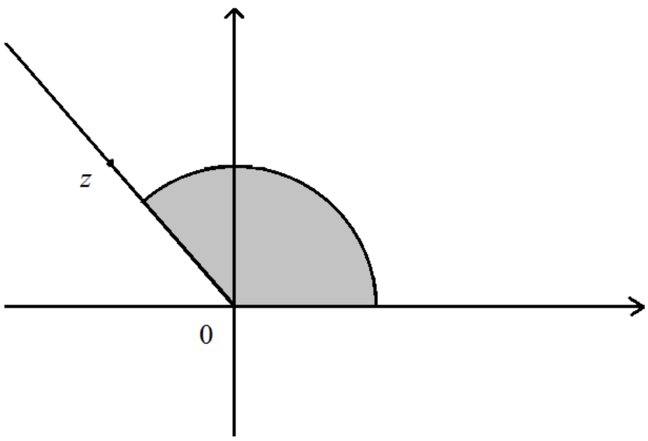
gdje je $Arg\ z$ glavni argument koji pripada intervalu $[0, 2\pi\rangle$.



Slika 8. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

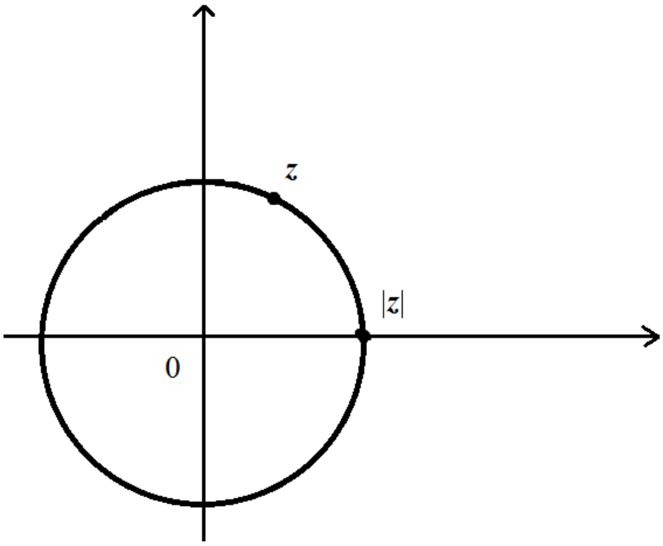
Pri trigonometrijskom prikazu kompleksnih brojeva mogu se zamijetiti tri važne činjenice:

1. Kompleksni brojevi s jednakim argumentom kao i z leže na polupravcu iz ishodišta koja prolazi kroz točku z, isključujući samo ishodište (Slika 9).



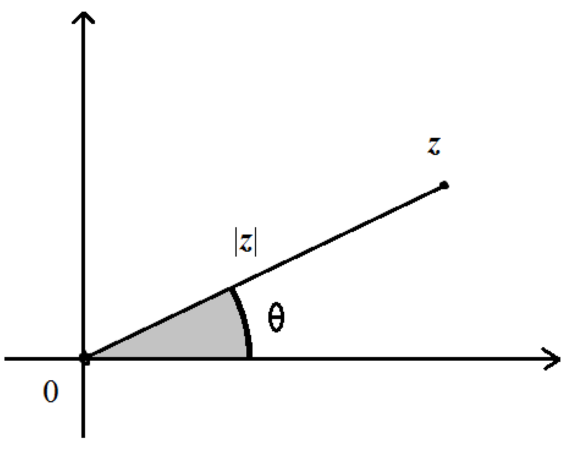
Slika 9. Prikaz kompleksnih brojeva s jednakim argumentima

2. Kompleksni brojevi s jednakom apsolutnom vrijednosti kao i z leže na kružnici sa središtem u ishodištu koja prolazi kroz točku z, dakle na kružnici polumjera $|z|$ (Slika 10) .



Slika 10. Prikaz kompleksnih brojeva s jednakim modulima

3. Kompleksni broj z (različit od 0) jednoznačno je određen svojom apsolutnom vrijednošću $|z|$ i svojim argumentom θ (Slika 11).



Slika 11. Jednoznačno određenje kompleksnog broja

3.4.1. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA $\cos\theta + i\sin\theta$ – JEDINIČNA KRUŽNICA

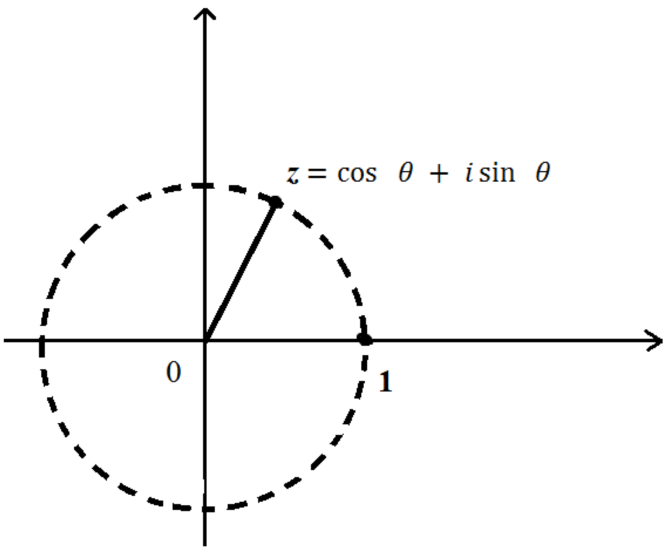
Kompleksni brojevi oblika

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

su svi brojevi koji se nalaze se na kružnici polumjera $|z| = 1$ sa središtem u ishodištu tj. na jediničnoj kružnici (Slika 12). To proizlazi iz činjenice da je

$$|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$

Promjenom argumenta θ od 0° do 360° obilazi se jednična kružnica, počevši od broja 1 na realnoj osi, u smjeru suprotnom smjeru kretanja kazaljke na satu.



Slika 12. Kompleksni brojevi na jediničnoj kružnici

3.4.2. MNOŽENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA U TRIGONOMETRIJSKOM ZAPISU

Kompleksni brojevi na jediničnoj kružnici se množe tako da im se argumenti zbroje. Naime, za dva kompleksna broja na jediničnoj kružnici

$$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \text{ , } z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

nije teško pokazati, koristeći adicijske formule za trigonometrijske funkcije da vrijedi

$$z_1 z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

Ukoliko vrijedi $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ iz gornje formule se dobiva formula za kvadriranje broja $z = \cos\theta + i\sin\theta$ na jediničnoj kružnici:

$$z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

Formula za množenje vrijedi i općenito, za sve kompleksne brojeve različite od 0, uz dodatak da se moduli pomnože. Ako je:

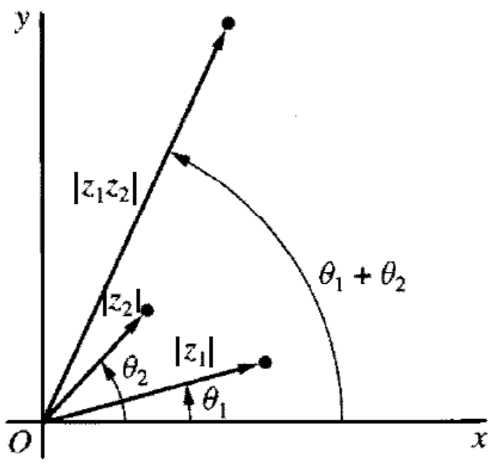
$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \; z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

onda je

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Ilustracija gornje formule dana je Slikom 13. I opet, ukoliko je $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ te $|z_1| = |z_2| = |z|$, imamo

$$z^2 = |z|^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)).$$



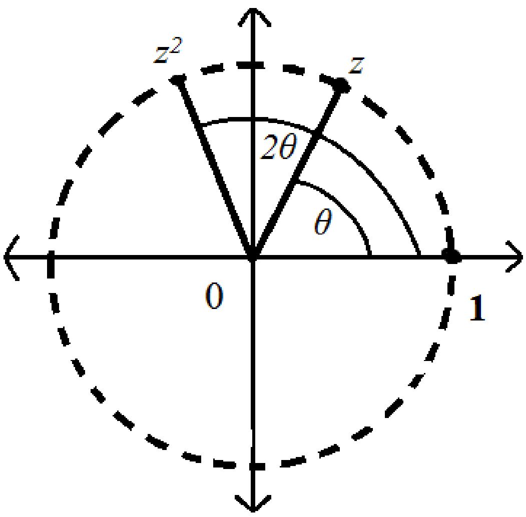
Slika 13. Umnožak kompleksnih brojeva

3.4.3. POTENCIRANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA U TRIGONOMETRIJSKOM ZAPISU – MOIVREOVA FORMULA

Kompleksni broj $z = \cos\theta + i\sin\theta$ potencira se tako što se argument pomnoži sa eksponentom. Potencirani broj ovog oblika se opet nalazi na jediničnoj kružnici (Slika 14). Ova tvrdnja se može općenito zapisati kao

$$z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),$$

što se naziva Moivreova formula. Gornja formula predstavlja poopćenje formule za kvadriranje kompleksnog broja na jediničnoj kružnici iz prethodnog odlomka.



Slika 14. Potenciranje kompleksnog broja

Moivreova formula ne vrijedi isključivo za kompleksne brojeve s jediničnim modulom već se može primijeniti na sve kompleksne brojeve različite od 0. Kompleksni se broj potencira tako da mu se apsolutna vrijednost potencira, a kut pomnoži s eksponentom. Ako je

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

onda je

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Ova je formula poopćenje formule za kvadriranje kompleksnog broja u trigonometrijskom zapisu, dane u prethodnom odlomku.

3.4.4. DIJELJENJE I KORJENOVANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA U TRIGONOMETRIJSKOM ZAPISU

Slično prethodnim odlomcima u kojima smo pokazali kako se množe i potenciraju kompleksni brojevi u trigonometrijskom zapisu, u ovom ćemo odlomku dati formule za dijeljenje i korjenovanje. Kompleksni brojevi na jediničnoj kružnici

$$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \text{ i } z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

dijele se tako da im se argumenti oduzmu, prema tome dobiva se

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2).$$

Ukoliko promotrimo dijeljenje kompleksnih brojeva čiji moduli nisu jednaki 1,

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ i } z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

dobili bismo sličnu formulu:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

Slično Moivreovoj formuli za potenciranje, postoji i Moivreova formula za korjenovanje: za jedinični kompleksni broj

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

vrijedi

$$\sqrt[n]{z} = \cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n},$$

gdje k poprima cjelobrojne vrijednosti od 0 do $n-1$. Vidimo da "ispravnih" odgovora na pitanje "što je $\sqrt[n]{z}$ " ima n, te da se svi ti kompleksni brojevi nalaze opet na jediničnoj kružnici, s argumentima koji se međusobno razlikuju za $\frac{2\pi k}{n}$. Za korjenovanje kompleksnog broja općenitog modula,

$$z = |z|(\cos\theta \ + i\sin\theta)$$

vrijedi analogna formula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right).$$

Iz gornje jednadžbe možemo uočiti da se svi n-ti korijeni iz kompleksnog broja općenitog modula $|z|$ nalaze na kružnici polumjera $\sqrt[n]{|z|}$ te su međusobno kutno udaljeni za $\frac{2k\pi}{n}$, počevši od $\frac{\theta}{n}$.

Napomenimo na kraju da je određivanje $\sqrt[n]{z}$ ekvivalentno rješavanju jednadžbe $z^n = 1$. Stoga se često za rješenja ove jednadžbe koristi naziv „korijeni jednadžbe".

3.4.5. PRIMJER – TREĆI KORIJENI IZ JEDINICE

U ovom odlomku na primjeru određivanja trećih korijena iz $|z| = 1$ pokazujemo kako se koristi formula za korjenovanje iz prethodnog odlomka. Sukladno napomeni s kraja prethodnog odlomka možemo problem određivanja trećih korijena iz jedinice postaviti kao problem rješavanja jednadžbe $z^3 = 1$.

$$z = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \qquad \theta = 0, |z| = 1$$

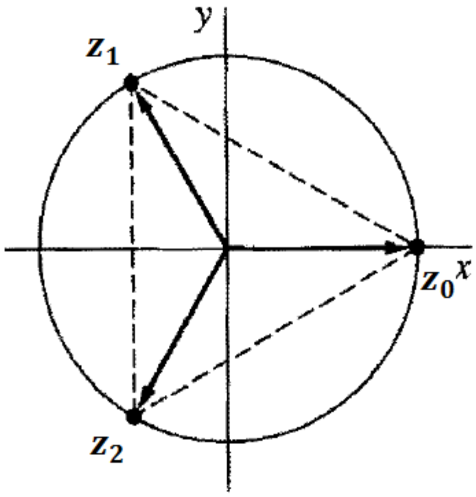
$$\sqrt[3]{z} = \cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}$$

gdje je $k = 0,1,2$

za $k = 0$ $\quad z_0 = \sqrt[3]{z} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

za $k = 1$ $\quad z_1 = \sqrt[3]{z} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

za $k = 2$ $\quad z_2 = \sqrt[3]{z} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



Slika 15. Treći korijeni broja $z = 1$

3.4.6. PRIMJER – KORIJENI IZ JEDINICE U PROGRAMSKOM PAKETU MATHEMATICA

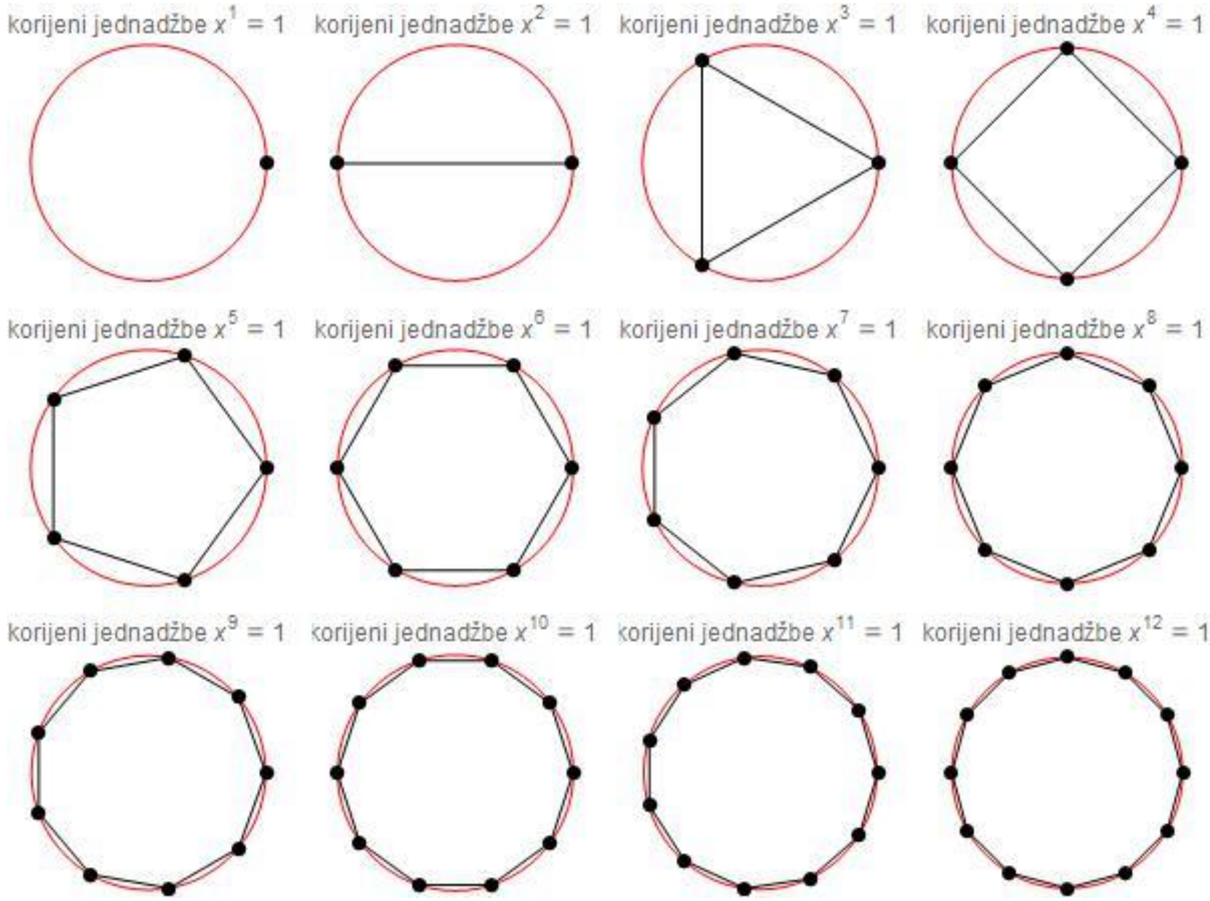
Koristeći sljedeće naredbe u programskom paketu *Wolfram Mathematica*

```
RootsofUnity[n_] :=
 Module[{p = {Re[#], Im[#]} & /@ (x /. {ToRules[Roots[x^n == 1, x]]})},
  {{Red, Circle[{0, 0}, 1]}, Line[Append[p, First[p]]],
   {PointSize[.06], Point /@ p}}]

MakeBoxes[RootsOfUnity[n_], TraditionalForm] :=
 RowBox[{RowBox[{"korijeni jednadžbe", " ",
     SuperscriptBox["x", MakeBoxes[n, TraditionalForm]]}], "=", "1"}]

GraphicsGrid[Partition[Table[Graphics[RootsofUnity[n], AspectRatio → Automatic,
    PlotLabel → RootsOfUnity[n]], {n, 12}], 4], ImageSize → 600]
```

dolazimo do n-tih korijena iz jedinice, za vrijednosti n=1,2,..., 12:



3.4.7. EKSPONENCIJALNI ZAPIS KOMPLEKSNOG BROJA

Koristeći poznatu Eulerovu formulu

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

kompleksan broj $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ može se zapisati u eksponencijalnom zapisu:

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Primijetimo da eksponencijalni zapis nije ništa drugo do trigonometrijski zapis u kojem smo $\cos\theta + i\sin\theta$ zamijenili s $e^{i\theta}$.

Zahvaljujući svojstvima eksponencijalne funkcije, formule za množenje i dijeljenje u eksponencijalnom zapisu imaju još logičniji oblik od onih u trigonometrijskom zapisu. Za brojeve $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ i $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ vrijedi:

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{ i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Slično formulama za potenciranje i korjenovanje iz prethodnog odlomka, postoje odgovarajuće formule u eksponencijalnom zapisu: za broj $z = |z|e^{i\theta}$ vrijedi

$$z^n = |z|^n e^{i\,n\theta} \text{ i}$$

$$z = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\theta+2\pi k}{n})} \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1).$$

4. PRIMJENE KOMPLEKSNIH BROJEVA U ZNANOSTI I INŽENJERSTVU

Kompleksni brojevi najčešće se primjenjuju u područjima usko vezanim uz matematiku i fiziku kao osnova za kompleksne funkcije. One se primjenjuju u područjima poput kvantne mehanike, analize signala, teorije kontrole, elektromagnetizma, dinamike fluida i drugima. U teoriji kontrole sustavi se često transformiraju pomoću Laplaceove transformacije koje funkciji realne varijable t (vrijeme) pridružuju funkciju kompleksne varijable s (kompleksna frekvencija). U dinamici fluida kompleksne funkcije se koriste za opisivanje potencijala toka u dvije dimenzije. Kompleksni brojevi se pojavljuju kao dio Fourierovih transformacija u elektronici za analizu promjenjivih napona i struja. Oni omogućuju objedinjavanje otpornika, kondenzatora i induktora unutar domene kružne frekvencije kao jednog kompleksnog broja (impedancija) koji nam govori o ukupnom otporu prolaska struje kroz strujni krug.

4.1. KVANTNA MEHANIKA

Kvantna mehanika je grana fizike koja proučava ponašanje elektrona i ostalih elementarnih čestica u atomima, molekulama i kristalima. U jednoj od najpoznatijih jednadžbi koja je također i jedna od temeljnih jednadžbi kvantne mehanike pojavljuje se imaginarna jedinica. Ta jednadžba je Schrödingerova jednadžba i onda prikazuje prostorno i vremensko ponašanje čestice u okviru kvantne mehanike. U svojem prvobitnom obliku jednadžba je izgledala ovako:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V(r,t)\,(r)$$

gdje je: ħ reducirana Planckova konstanta, i imaginarna jedinica, $\frac{\partial}{\partial t}$ parcijalna derivacija po vremenu, $\psi(r,t)$ valna funkcija, ∇^2 nabla operator i $V(r,t)$ potencijalna energija.

4.2. DIGITALNA OBRADA SIGNALA

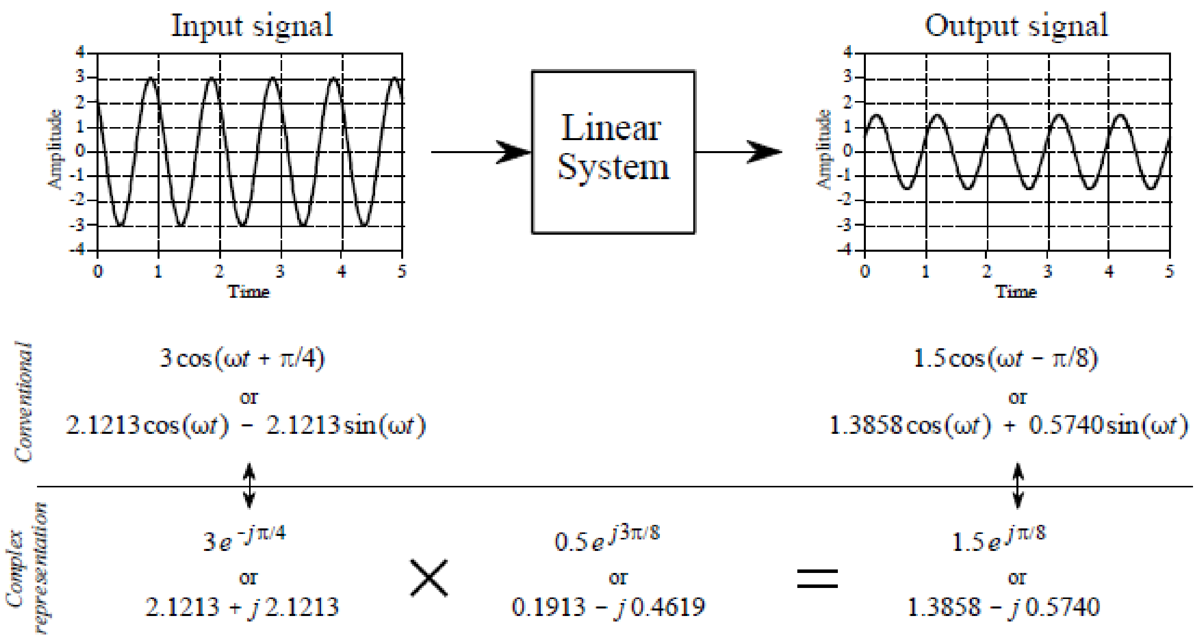
U digitalnoj obradi signala kompleksni brojevi se koriste zbog mogućnosti da jednostavno i sažeto predstave valne oblike. Tradicionalno se sinusoida zapisuje u jednom od ovih oblika: $M\cos(\omega t + \phi)$ ili $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ gdje M, A i B označavaju amplitude, ϕ fazu, ω frekvenciju Pošto se koriste po dva parametra (A i B te M i ϕ) da se izrazi sinusoida moguće je zamijeniti taj oblik s kompleksnim brojem. Ta zamjena je važna jer omogućuje uporabu Fourierove transformacije koja transformira vremenski signal u frekvencijsko područje. Za trigonometrijski zapis ova zamjena izgleda ovako:

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \leftrightarrow a + jb$$

a za eksponencijalni zapis

$$M\cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow Me^{j\phi}.$$

U elektrotehnici imaginarna jedinica i zamijenjena je s j zbog korištenja oznake i za jakost struje. Uvodeći ovu zamjenu treba imati na umu da će korisnost rješenja ovisiti o primjerenosti operacija koje ćemo provesti nad našim novim (kompleksnim) parametrima. Na primjer, za dva vala operacija zbrajanja daje korisno rješenje jer će rješenje biti novi kompleksni broj koji predstavlja novi val, a množenje može dati i broj bez imaginarnog dijela čime se gube svojstva vala.



Slika 16. Prikaz prolaska sinusoide kroz linearni sustav

Na Slici 16. vidimo primjer uporabe kompleksnih brojeva kao zamjene za valnu funkciju sinusoide prilikom prolaska kroz linearni sustav. Linearni sustav također je predstavljen kao kompleksni broj.

4.3. FRAKTALI

Fraktali su geometrijski objekti razlomljene, tj. necjelobrojne dimenzije. Oni daju jednaku razinu detalja neovisno o stupnju uvećanja; svaki dio je (barem približno) umanjena kopija originala – kažemo da fraktali posjeduju svojstvo samosličnosti. Fraktalni oblici se mogu naći u prirodi. Jedan primjer su biljke poput brokule i paprati, također med kristalizira u fraktalne oblike. Fraktalna struktura može se primijetiti kod ljudi i drveća, gdje krvne žile i grane imaju približno istu strukturu koja posjeduje određena fraktalna svojstva.

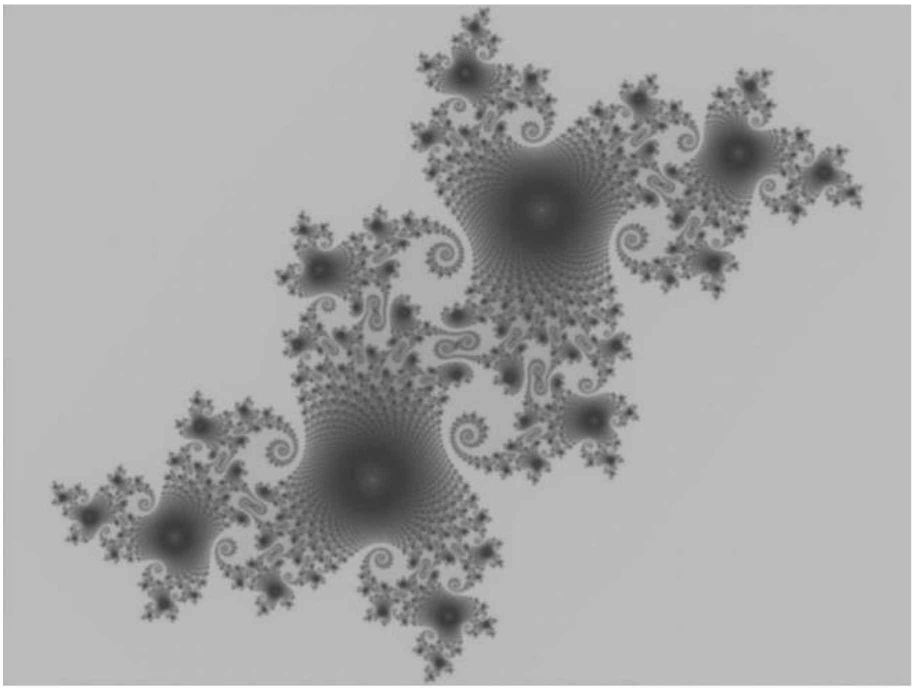
Za temu kompleksnih brojeva važni su Julijevi skupovi (Slika 17) i Mandelbrotov skup (Slika 18). Julijevi skupovi dobivaju se pomoću kvadratne funkcije

$$f(z) = z^2 + c$$

to jest pomoću pripadajućeg niza

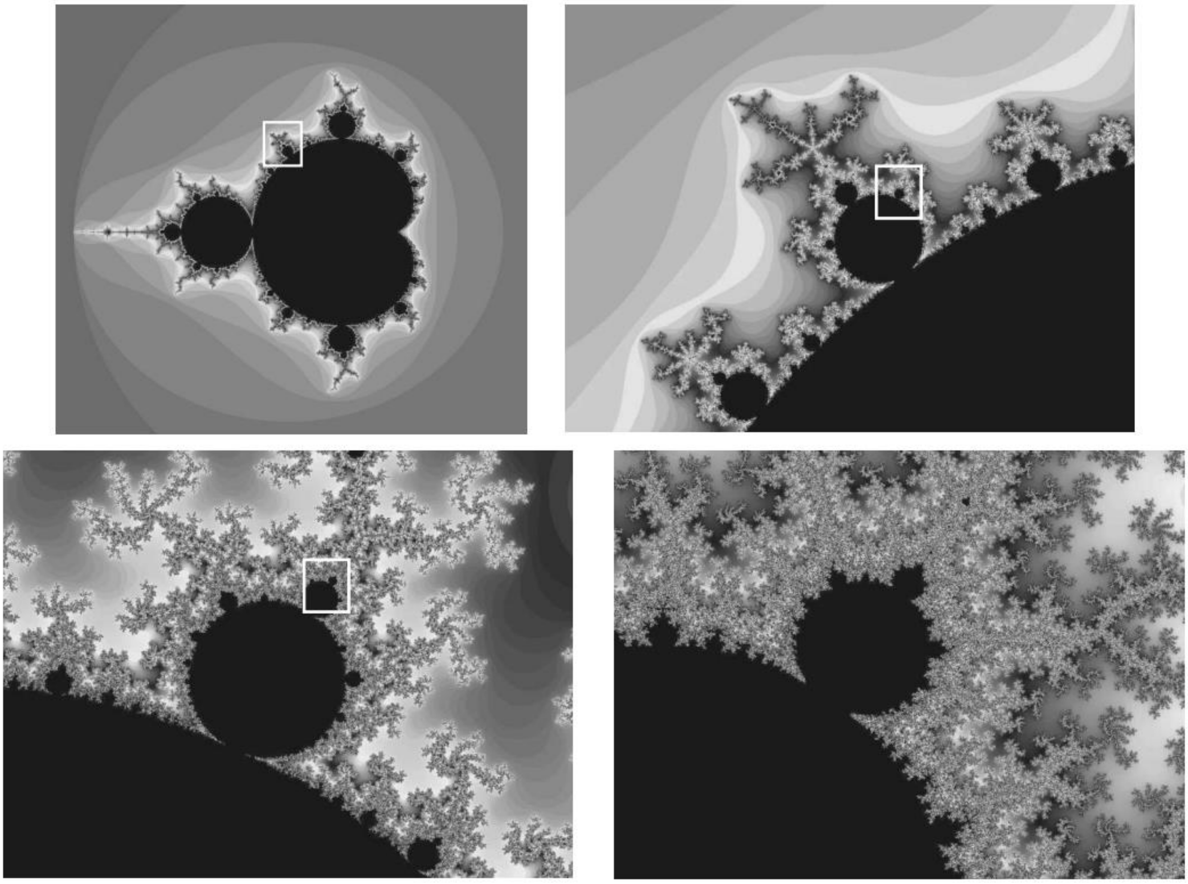
$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c,$$

gdje je z_n niz kompleksnih brojeva, a c fiksirani (izabran) kompleksan broj. Za različite vrijednost broja c mogu se dobiti različiti grafički prikazi u kompleksnoj ravnini poput ovog:



Slika 17. Primjer Julijev skupa

Mandelbrot je promatrao istu funkciju i pripadni niz te je uz uvjet $z_0 = 0$ dobio skup točaka c kompleksne ravnine za koje je Julijev skup (u užem smislu) povezan. Na slici 18. može se vidjeti Mandelbrotov skup i dodatno uvećanje jednog njegovog dijela na kojem se očituje svojstvo samosličnosti.



Slika 18. Mandelbrotov skup s uvećanjem izabranog dijela

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu bolje smo se upoznali s kompleksnim brojevima, prošli smo kroz njihovu povijest od nezahvalnih početaka do konačnog prihvaćanja. Obradili smo najvažnije matematičke operacije s kompleksnim brojevima i naveli njihovu primjenu u znanosti i inženjerstvu. Kompleksni brojevi se sastoje od realnog i imaginarnog dijela. Upravo imaginarni dio, zahvaljujući tome da nije realan a ipak „postoji" i itekako ima svoj značaj, nam govori o ljepoti matematike i ljudske prirode. Matematika je alat kojim pokušavamo upoznati svijet oko sebe te ga simbolički opisati, doduše na ne uvijek najjednostavniji ili najrazumljiviji način. Shvaćajući upravo tu činjenicu dolazimo do pitanja kako može postojati drugi korijen negativnog broja ako ne postoji broj koji kvadriranjem daje negativan broj, ali ujedno i do odgovora na njega. Ali još važnije, razumijevajući specifičnu ulogu matematike u ljudskoj misli možemo pojmiti zašto su za rješenje „problema" kompleksnih brojeva (i sličnih teških pitanja) bile potrebne ideje izvan okvira vremena u kojem je postavljen.

6. LITERATURA

1. J. Ward Brown, R. V. Churchill, Complex Variables and Applications, Seventh edition, McGraw-Hill, Boston, 2004., str. 1-31
2. T. Needham, Visual Complex Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1997., str.1-10
3. R. Penrose, The Road to Reality, Jonathan Cape, London, 2004., str. 71-85
4. P. J. Nahin, An Imaginary Tale – The Story of *i*, Princeton University Press, Princeton And Oxford, 1998., str.1-141
5. S. W. Smith, The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, California Techincal Publishing, San Diego, 1997.
6. V. Sukser, Julijini skupovi i Mandelbrotov skup, PlayMath br.12 2006. str. 4-6
7. C. P. Kwong, The mystery of square root of minus one in quantum mechanics, and its demystification, 2009. str. 1-9
8. O. Merino, A Short History of Complex Numbers, Rhode Island, 2006. str. 1-5
9. http://matematika.fkit.hr/kontakt.html (pristup rujan 2018.)

7. ŽIVOTOPIS

Filip Majsec [redacted] Upisao je Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Krapini 2008. i maturirao 2012. Iste godine upisuje preddiplomski studij na Fakultetu kemijskog inženjerstva u Zagrebu. Stručnu praksu odradio je u analitičkom laboratoriju Vetropack Straže.