SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ

Monika Marković

ZAVRŠNI RAD

Zagreb, rujan 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ

Monika Marković

TEORIJA KAOSA

ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada:

doc. dr. sc. Miroslav Jerković

Članovi ispitnog povjerenstva:

doc. dr. sc. Miroslav Jerković

izv. prof. dr. sc. Marija Vuković Domanovac

dr. sc. Dajana Kučić

Zagreb, rujan 2015.

Zahvaljem doc. dr. sc. Miroslavu Jerkoviću na izvrsnom mentorstvu i predanosti tijekom pisanja ovog rada. Također se zahvaljujem i mojim roditeljima, braći i sestri te prijateljima na podršci tijekom trajanja mog studija.

TEORIJA KAOSA

Sažetak rada:

U ovom radu dan je uvid u teoriju kaosa koja se pojavljuje kao nova znanost dvadesetog stoljeća uz druge dvije velike znanstvene teorije, kvantnu teoriju i teoriju relativnosti. Na početku rada objašnjava se podrijetlo riječi i značenje pojma kaosa te primjena teorije kaosa u svakodnevnom životu, medicini, psihologiji te ekonomiji. Središnji dio rada posvećen je prikazu primjera kaotičnih sustava u znanosti i inženjerstvu, s posebnim naglaskom na matematičku karakterizaciju kaosa.

Ključne riječi: teorija kaosa, dinamički sustav, nelinearna dinamika, efekt leptirovih krila, fraktal

CHAOS THEORY

Abstract:

We present an insight into the chaos theory, which is emerging as a new scientific theory of the twentieth century, together with quantum theory and the theory of relativity. At the beginning of the text the origin and the meaning of the word chaos is explained, as well as the application of chaos theory in everyday life, medicine, psychology and economics. The central part presents examples of chaotic systems in science and engineering, with special emphasis on the mathematical characterization of chaos.

Key words: chaos theory, dynamical systems, nonlinear dynamics, butterfly effect, fractal

SADRŽAJ

1. UVOD

Kaos je riječ grčkog podrijetla. Ona je dio našeg svakodnevnog rječnika, a označava nered, metež, zbrku, nepredvidljivost. Sa filozofskog gledišta, kaos predstavlja ono što je postojalo prije no što je u svijet u kojem živimo unesen red. U psihološkom smislu, ta riječ sadržava strepnju da će red jednom nestati i da će ponovo zavladati opći metež.[1]

Kroz povijest, čovjek je počeo razmišljati na deterministički način kojeg karakterizira vjera u mogućnost predviđanja budućih događaja, npr. pokušaj predviđanja dinamike složenih nelinearnih sustava nalazimo u meteorologiji, a u tom predviđanju se koriste jednadžbe čija rješenja možemo susresti u svakodnevnoj prognozi vremena.[2]

Prošlo stoljeće obilježile su tri velike znanstvene teorije: kvantna teorija, teorija relativnosti i teorija determinističkog kaosa. Teorija kaosa proučava neke nelinearne dinamičke sustave u matematici i fizici koji se pod određenim uvjetima ponašaju na prividno nepredvidljiv način, a uvelike ovise o početnim uvjetima. Teorija kaosa istražuje tajni red prirode u kojem pravilnost (red) i nepravilnost (kaos) postoje jedan pored drugog, a njen cilj je pronaći temeljni poredak u naizgled nasumičnim podacima. U prošlosti se ovaj izraz koristio za opisivanje fizikalnih sistema s velikim brojem stupnjeva slobode. U klasičnom smislu kaos se odnosio na opis statističkih događaja u kojima smo mogli izračunati samo vjerojatnost ishoda. Znanstvenici su se bavili problemom nemogućnosti jedinstvenog određivanja budućeg stanja sustava. Uvijek bi postojale najmanje dvije mogućnosti (npr. slučaj bacanja novčića gdje postoje dvije mogućnosti: pismo ili glava i za svaku od njih je vjerojatnost 50%). Tek se pojavom računala mogla dodatno razviti teorija kaosa jer jedino računala mogu rješavati jednadžbe za predviđanje događaja. [2,3,4]

Pojam kaosa svojom univerzalnošću prožima različite discipline i polja ljudskog djelovanja kao što su dinamika fluida, meteorologija, proučavanje biljnih i životinjskih populacija, ekonomski i politički fenomeni, način djelovanja ljudskog organizma.[2]

2. OPĆI DIO

U ovom poglavlju predstavit ćemo pojam kaosa u njegovom najširem smislu, što uključuje porijeklo riječi kaos, kao i razvoj kroz vrijeme, a zaključno sa značenjem tog pojma u različitim domenama ljudskog djelovanja (psihologija, ekonomija, medicina).

2.1. Kaos u mitologiji

Pri proučavanju podrijetla riječi kaos susrećemo se s grčkom mitologijom gdje Kaos predstavlja prvotno božanstvo, prvotno stanje postojanja, beskrajan prostor bez života iz kojeg je sve nastalo (zemlja, zrak, voda i vatra). Kaos ima tri glavne karakteristike, a to su:

- to je zaljev bez dna u kojeg sve beskrajno pada, kontrast je Zemlji kao stabilnome tlu
- mjesto bez moguće orijentacije, sve pada u svim mogućim smjerovima
- prostor koji razdvaja, nakon što su se Zemlja i Nebo razdvojili, Kaos stoji između njih i dijeli ih.[5]

Kaosovo ime dolazi od grčke riječi χαίνω, *kaínô* = "zijevati", što bi značilo „provalija koja zjapi“, a u današnjem smislu kaos.[6]

Slika 2.1. Umjetnička vizija kaosa

2.2. Kaos u svakodnevnom životu

U ljudskoj svakidašnjici lanac događaja može imati različite točke nestabilnosti. Primjer za to je automobilska nesreća na autocesti koja uzrokuje usporavanje automobila koji se nalaze iza mjesta nesreće, što uvjetuje kašnjenje i nestizanje na trajekt koji vozi svakih sat vremena, što pak onemogućuje vlasniku apartmana odlazak na posao u redovito vrijeme. U takvim okolnostima osjećamo da je u kaotičnom sustavu fina osjetljivost o početnim uvjetima neizostavna posljedica svojevrsnog balansa u prirodi.

2.3. Teorija autopoetskih sustava

Neki autori su proučavali autopoetičnu organizaciju i povezali je sa kaosom.

"**Autopoetska organizacija** (grč. autos = sam, poiein = činiti) definira se kao mreža uzajamno povezanih procesa koji proizvode takve komponente koje svojom interakcijom generiraju istu mrežu procesa koja ih je stvorila. Prema tome, proizvod autopoetskog sustava jest sam sustav".[6]

Teorija autopoetske organizacije predstavlja sintezu teorije emocija, teorije interakcije i teorija unutarnjih mišljenja i znanja. Jedan od vodećih teoretičara iz domene teorije emocija, R. Plutchik je autor EPI (*emotional profile index*) testa. Razvitkom kompjutorske verzije EPI testa, zahvaljujući A. Laucu, svakom čovjeku je omogućena interpretacija vlastitih emocija i bolje upoznavanje samog sebe.

1**. Teorija emocija** je temelj samoodgoja. Kada čovjek spozna svoje pozitivne i negativne strane tada može djelovati na svoj razvoj i pri rješavanju problema krenuti od sebe jer to traži spoznaja da upravo „male“ emotivne promjene mogu dovesti do velikog negativnog ili pozitivnog pomaka.

2. **Teorija interakcije** je temelj samoorganizacije. Samoorganizirajući sustavi su oni koje susrećemo u prirodi, otvoreni su i u interakciji su s okolinom(razmjenjuju materiju, energiju i informacije). To su sustavi koji sami sebe izgrađuju (autopoetski sustavi). Teorija autopoetskog sustava našla je primjenu u suvremenoj teoriji i praksi upravljanja ljudskim sustavima u gospodarskim i drugim organizacijama Zapadne Europe, SAD i Japana.

3. **Teorija mišljenja i znanja** je temelj samoobrazovanja. U svrhu što boljeg stjecanja znanja, potrebno je organizirati povezivanje mladih umova s vodećim umovima svijeta sa što manje

posrednika koji otežavaju komunikaciju. U tome dosta pomaže upotreba mrežnih informacijskih servisa.[1]

2.4. Leptirov učinak

Pojam **leptirov učinak** uvodi Edward Lorenz, a označava ekstremnu ovisnost o početnim uvjetima gdje mala promjena u determinističkim nelinearnim sustavima može rezultirati velikim promjenama u idućim stanjima.[8]

Teorija kaosa proučava sustave osjetljive na početne uvjete, a čijom promjenom dolazi do ogromnih posljedica.

Svaki pojedinac je bitan, a tako i leptir čije mahanje krilima može promijeniti slijed događaja koji bi se inače zbio. U tom bi se smislu moglo reći kako će zamah leptirovih krila spriječiti pojavu uragana na Floridi. To je smisao tzv. leptirova učinka, tj. ekstremne osjetljivosti (u ovom slučaju klime) o početnim uvjetima. Svako dugoročno prognoziranje vremena za sada je nadasve bezuspješno.

O Leptirovom učinku (engl. *Butterfly Effect*) često su citirane metafore:

"Mašući krilima danas u Pekingu, leptir sljedećeg mjeseca može promijeniti olujne oblake iznad Londona."

"Ako leptir zamahne krilima u Pekingu, on može uzrokovati uragan na Floridi".[2]

Slika 2.2. Prikaz kaosa u obliku leptira (Lorenzov neobični atraktor)

2.5. Kaos u ekonomiji

Kako se ponašanje kaotičnih sustava istraživalo i u društvenim znanostima, teorija kaosa našla je svoju primjenu i u ekonomiji. Različite nepravilnosti povezanih s kamatama, zapošljavanjem ili burzovnim indeksima bile su pripisivane slučajnim pojavama, a mogućnost objašnjenja i predviđanja takvih pojava pobudila je interes kod brojnih ekonomskih teoretičara. Benhabib i Dan pripadaju manjoj skupini znanstvenika koji proučavaju kaos u mikroekonomskom kontekstu, konkretno problem nemogućnosti predviđanja izbora potrošača u promjenjivom okruženju. Pokušali su formulirati zakonitosti po kojima bi potrošači donosili odluke te su smatrali kako je potrebno kreirati bezvremenski model koji predstavlja spoj efekta bogatstva, rada i navika, običaja i brojnih drugih čimbenika koji doprinose donošenju odluke. Takav model ne opovrgava klasična pravila izbora potrošača temeljena na koristi, ali pokazuje kako nije moguće u potpunosti predvidjeti buduća kretanja izbora potrošača nego samo umanjiti efekt iznenađenja.

Zanimljiva je primjena teorije kaosa u financijama. Burzu dionica možemo definirati kao visokodimenzijski kaos s velikim brojem različitih parametara. Još nitko nije uspio identificirati pripadni kaotični atraktor zbog činjenice da burzovne transakcije nisu dovoljno dugo stacionarne (prebrzo se odvijaju da bismo mogli uočiti pravilnosti u „neredu“).[7]

Što se tiče burze, kaos je rezultat psihologije trgovanja, koja nikad nije posve racionalna. Ljudi reagiraju s različitim intenzitetom emocija na dobitke i gubitke i mogu postati pristrani zbog posljednjih novosti i posljedično ne mogu precizno odrediti rizik. Međutim, postoje osnovna načela, temeljne ekonomske pretpostavke koje nam govore da ljudi pokušavaju doći do najvećih zarada s najmanjom količinom rizika. Gledajući trendove cijena dionica, općenito se može reći da cijene skaču s jedne razine na drugu, stvarajući nepravilne uzorke. koji vidimo na slici 2.3.[8]

Slika 2.3. Kretanje cijena dionica u vremenskom razdoblju od 5 godina

2.6. Kaos u medicini

Medicina predstavlja bitno područje primjene teorije kaosa. Naime, ljudsko tijelo je složeni organizam gdje svaki organ ima svoje vlastito djelovanje i koje je mjesto različitih oscilacija. Pokazuje se da postoji iznenađujući poredak u neredu koji može savladati ljudsko srce - grčevitom stezanju koje je prvenstveni uzrok iznenadnih, neobjašnjivih smrti. Osim toga, kaos je bitan faktor i pri procesima razmišljanja. Možemo stoga reći kako teorija kaosa ima posve novi način traženja reda u sustavima u kojima na prvi pogled izgleda da ga uopće nema.[1]

Sportska psihologija je mjera umnih komponenti i komponenti ponašanja što može utjecati na nastup. Jedan način razumijevanja mozga je EEG (elektroencefalograf) koji bilježi potencijalne promjene u električnoj aktivnosti mozga preko elektroda na površini lubanje. Kontinuirano bilježi valove različitih frekvencija i amplituda koje su odraz naših aktivnosti, odnosno stanja kao što su san, odmor, relaksacija, rješavanje složenih problema.

Postoje četiri najvažnija raspona moždanih valova: beta (od 14 do 40 Hz), alfa (od 8 do 13 Hz), theta (od 4 do 7 Hz) i delta (od 0.5 do 3 Hz). Različite studije su proučile povezanost između alfa valova i uspjeha u sportu te je uočeno kako povećana alfa aktivnost povećava preciznost. Ti EEG signali su posljedica ili slučajnih procesa ili su generirani nelinearnim dinamičkim sustavima koji pokazuju kaotično ponašanje.[9]

3. PREGLEDNI DIO

3.1. Pojam determinističkog kaosa

Pored teorije relativnosti i kvantne teorije, teorija kaosa je treće bitno teorijsko dostignuće suvremene znanosti koje je značajno doprinijelo suvremenom shvaćanju svijeta općenito.[1] Poznati francuski matematičar Henry Poincaré (1854.-1912.) prvi je uočio kako se mnogi jednostavni nelinearni deterministički sustavi mogu ponašati na naizgled nepredvidljiv i kaotičan način. Pronađeni su pionirski radovi o kaosu i u literaturi drugih matematičara poput Birkhoffa, Cartwrighta, Littlewooda, Levinsona, Smalea i Kolmogorova i drugih.[1,10]

Tako je napredovanjem znanosti došlo do toga da Laplaceovo shvaćanje svemira nije u potpunosti točno. Naime, Laplaceov determinizam prema (11) je mehaničko shvaćanje svemira prema kojemu čitavo znanje o stanju svemira u jednome trenutku u cijelosti određuje njegovo stanje u svim trenutcima u budućnosti i prošlosti. Znanstvenici se nisu složili s njegovim shvaćanjem jer su smatrali kako nije moguće beskonačno precizno odrediti uvjete u danom trenutku, ali je moguće približno pa bi tako i budući događaji bili približno određeni. Jedan od bitnih događaja u znanosti bio je dan kada je meteorolog-fizičar Edward Lorenz, 1961. godine dokazao suprotno.[12]

Teorija kaosa počiva na proučavanju nelinearne dinamike, ali se naglašava kako se radi o složenom sustavu isprepletenosti pravilnosti i nepravilnosti, a ne o anarhiji. Na temelju specijalnih matematičkih metoda i usavršenih kompjutorskih programa analiziraju se nelinearne pojave. Razvoj informatike i pojava Interneta je omogućila veliki skok u razvoju teorije kaosa. Teorija kaosa vrlo je primijenjena u raznolikim disciplinama poput biologije, ekonomije, kemije, inženjerstva, mehanike fluida, fizike.[7]

Postavlja se pitanje kako matematika može biti nepredvidiva. Matematički modeli dinamičkih sustava sastoje se od početnih uvjeta i diferencijalnih jednadžbi koje opisuju promjenu varijabli tijekom vremena. Ukoliko se rezultati diferencijalnih jednadžbi ponovno uvrštavaju u te jednadžbe postupkom iteracije dobiju se krivulje u apstraktnom matematičkom prostoru, tzv. faznom prostoru. Ako sustav krene iz dviju susjednih točki faznog prostora tada svaka slijedi svoju putanju i završava u susjednim točkama faznog prostora. Ovako opisan sustav je linearan, a nasuprot njemu nalazi se nelinearan sustav gdje u nekim predjelima raspona parametara dolazi do kaosa i totalno je nemoguće predvidjeti putanje sustava koje su krenule iz susjednih točaka. Upravo ta mala promjena početnih uvjeta može veoma utjecati na konačni ishod, a poznata je pod nazivom „leptirov učinak“.[1]

3.2. Logističko preslikavanje

Logističko preslikavanje jedan je od najjednostavnijih modela kojim se može opisati i pokušati predvidjeti kako se mijenja populacija određene vrste (npr. biljaka ili životinja) na nekom području u slijedu jednakih vremenskih intervala. Neobično svojstvo ovog preslikavanja je pojava nelinearne dinamike, tj. kaotičnog ponašanja.

Logističko preslikavanje zadano je jednostavnom rekurzivnom jednadžbom:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)},$$

uz sljedeće značenje pojmova i simbola:

λ zadani parametar logističkog preslikavanja, regulira uvjete preživljavanja (stupanj razmnožavanja, količina hrane, neprijatelja itd.)

x_0 zadana nulta generacija populacije (tzv. sjeme)

x_n n-ta generacija populacije

n redni broj pojedine generacije

Napomenimo da je parametar λ realni broj čije vrijednosti uzimamo iz intervala [0, 4], dok su vrijednosti generacija (x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) realni brojevi iz intervala [0, 1], a predstavljaju relativnu veličinu pojedine generacije u odnosu na zamišljenu, maksimalnu vrijednost koja iznosi 1. Ovdje oznaka populacije n predstavlja prirodni broj.

Vidimo da je logističko preslikavanje jedinstveno određeno zadavanjem vrijednosti parametra λ te vrijednosti nulte generacije, tj. zadavanjem sjemena x_0. Proučavajući kako se odvija dinamika rasta ili pada populacije, uočavamo da ona izrazito ovisi o iznosu parametra λ, a ne toliko o zadanoj vrijednosti x_0.

Kako bi se bolje razumjelo što se događa, najbolje je prikazati grafičku ovisnost vrijednosti x_n o iteracijskim brojevima (generacijama) n – tzv. generacijski ili vremenski prikaz. Osim ovog prikaza koji pokazuje evoluciju populacije, koristit ćemo i tzv. *cob-web* dijagram (ili „paukovu mrežu“).

Prikazat ćemo kako izbor parametra λ utječe na evolucijsku dinamiku populacije. U svakom od sljedećih primjera fiksirat ćemo vrijednost nulte generacije na $x_0 = 0.1$. Pri izradi dijagrama koristimo se programskim paketom *Mathematica* (računalni programi nalaze se u Prilogu).

1.) Za svaki λ iz intervala [0, 1] populacija će u konačnici izumrijeti, neovisno o početnoj vrijednosti x_0.

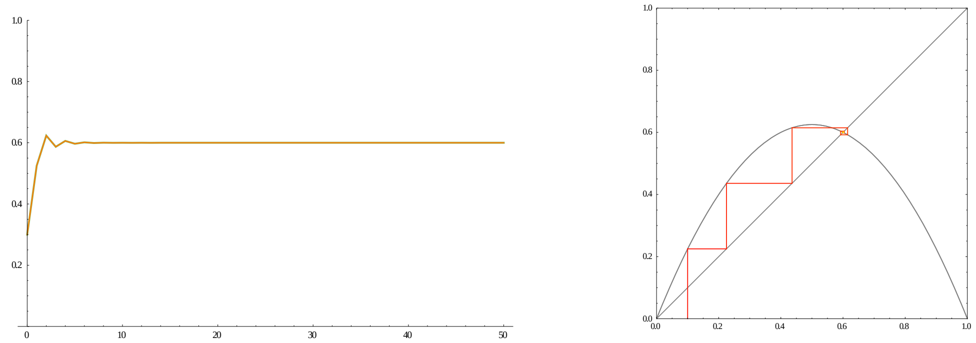
2.) Za svaki λ iz intervala [1, 2] populacija se brzo približava fiksnoj vrijednosti $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, neovisno o početnoj vrijednosti x_0.

3.) Za svaki λ iz intervala [2, 3] populacija će najprije neko vrijeme oscilirati oko fiksne vrijednosti $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, a nakon toga će poprimiti tu vrijednost. Kao primjer prikažimo što se događa za $\lambda = 2.5$ – ovdje fiksna vrijednost iznosi 0.6:

$\lambda = 2.5$

$x_0 = 0.1$

$n = 100$



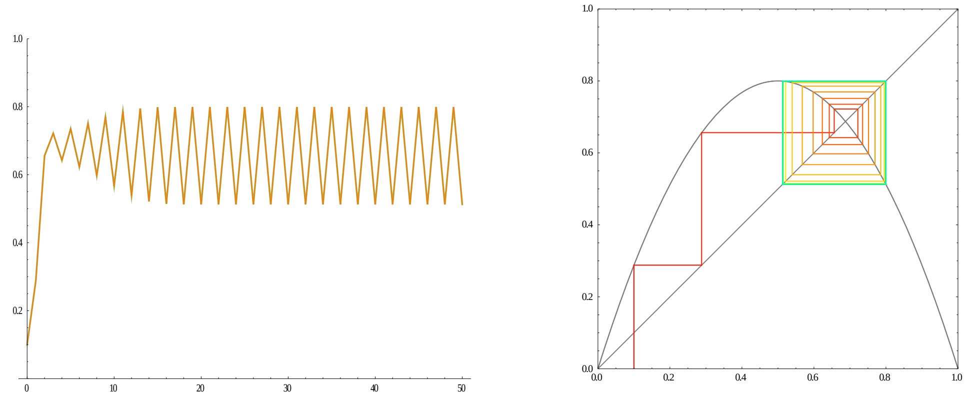
Slika 3.1. Generacijski prikaz i paukova mreža logističkog preslikavanja za $\lambda = 2.5$

4.) Za svaki λ iz intervala [3, 3.44] populacija će za skoro sve početne vrijednosti oscilirati između dvije fiksne vrijednosti:

$\lambda = 3.2$

$x_0 = 0.1$

$n = 100$



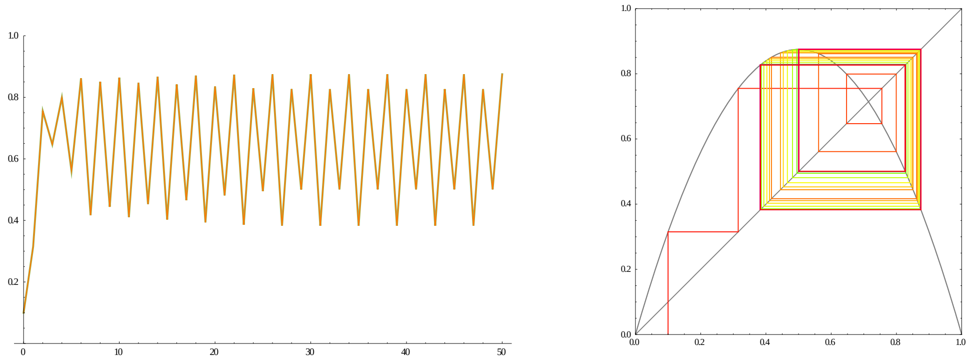
Slika 3.2. Generacijski prikaz i paukova mreža logističkog preslikavanja za $\lambda = 3.2$

5.) Za svaki λ iz intervala [3.54409, 3.56995] populacija će oscilirati između 2^N fiksnih vrijednosti, gdje je *N* prirodni broj veći od 2. U našem primjeru, za λ = 3.5, populacija oscilira između $2^2 = 4$ fiksne vrijednosti:

$\lambda = 3.5$

$x_0 = 0.1$

$n = 100$



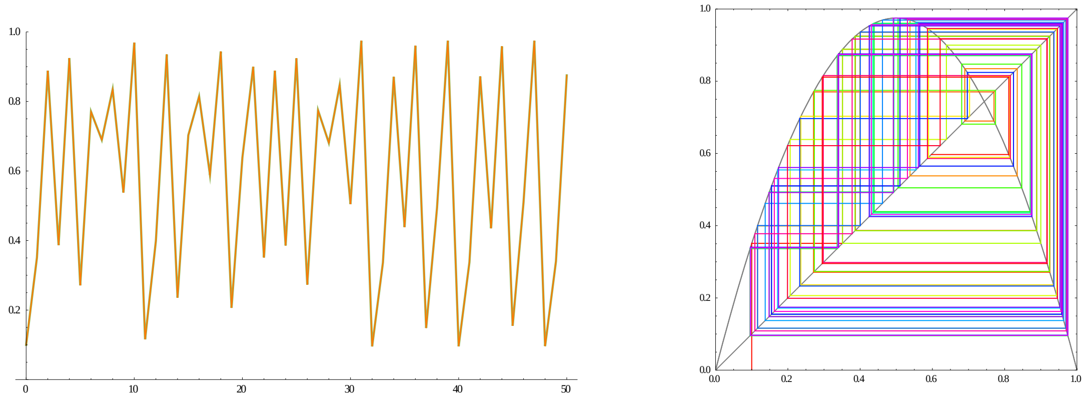
Slika 3.3. Generacijski prikaz i paukova mreža logističkog preslikavanja za $\lambda = 3.5$

6.) Za svaki λ veći od 3.56995, a manji od 4, populacija pokazuje kaotično ponašanje:

$\lambda = 3.9$

$x_0 = 0.1$

$n = 100$

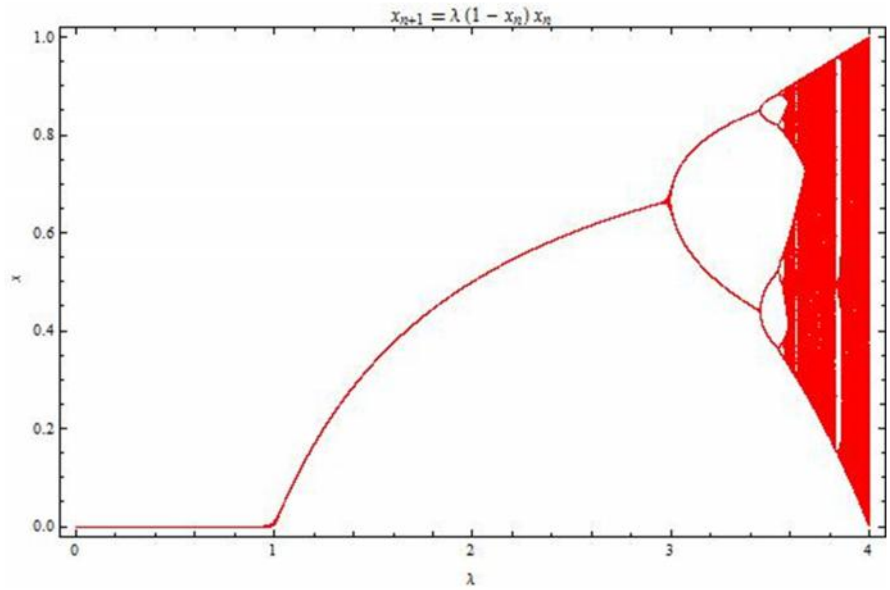


Slika 3.4. Generacijski prikaz i paukova mreža logističkog preslikavanja za $\lambda = 3.9$

7.) Za λ veći od 4, za gotovo sve početne vrijednosti x_0 populacija će napustiti vrijednosti iz intervala [0,1] pa govorimo o divergenciji.[15]

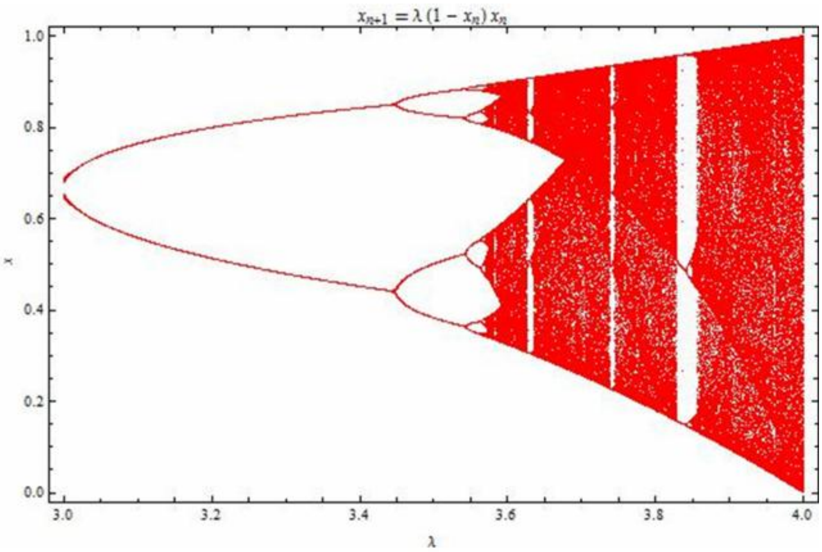
Kroz raspravu o mogućim dinamikama populacije uz različite izbore parametra λ uočavamo potrebu da na jednom mjestu prikažemo sve moguće slučajeve populacijskih evolucija koje ovaj matematički model može obuhvatiti. Pokazuje se da postoji takav vizualni prikaz – to je tzv. **bifurkacijski dijagram.** Bifurkacijski dijagram pokazuje moguće dugoročne vrijednosti fiksne točke (za $n \to \infty$) logističkog preslikavanja kao funkciju parametra λ. Za prikaz bifurkacijskog dijagrama koristimo računalni kod napisan za programski paket Mathematica, uz instrukcije za crtanje završnih (fiksnih) vrijednosti populacije za λ iz intervala [2.5,4], s korakom pomaka u iznosu od 0.02.[2,13]

Na slikama 3.5. i 3.6. (izrađenima u *Mathematici* – vidi Prilog) nalaze se bifurkacijski dijagrami gdje je prikazana ovisnost x_n (za $n \to \infty$) o λ. Prednost bifurkacijskog dijagrama jest u tome što jasno prikazuje kako se malim promjenama u vrijednosti λ dolazi do populacija s bitno različitim dinamikama. Ukoliko je λ<1, sve su vrijednosti jednake nuli, što znači da će populacija izumrijeti. U intervalu 1 <λ < 3 sve su točke sažete u jednu liniju, dakle populacija konvergira ka jednoj fiksnoj vrijednosti. U intervalu 3 < λ < 3.4 graf se račva, što znači da za te vrijednosti λ populacija konvergira ka dvjema fiksnim vrijednostima. Za λ > 3.56 vidimo da nastupa kaotično ponašanje u kojem populacija ne konvergira ka nekim određenim fiksnim vrijednostima.



Slika 3.5. Bifurkacijski dijagram logističkog preslikavanja

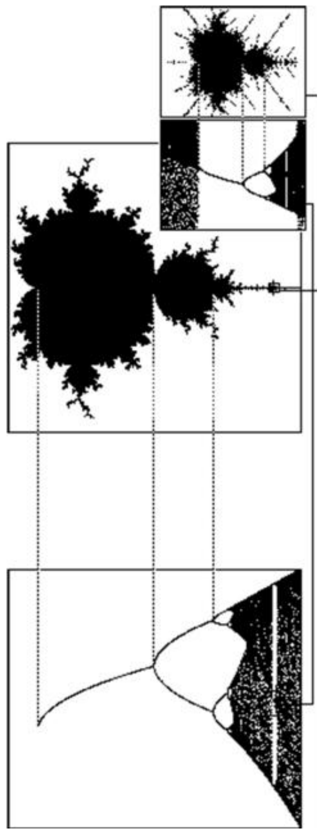
Ukoliko se za parametra λ uzmu vrijednosti između 3.0 i 4 tada se dobije uvećani prikaz kaotičnog dijela bifurkacijskog dijagrama (slika 3.6.)



Slika 3.6. Bifurkacijski dijagram logističkog preslikavanja (prikaz kaotičnog segmenta)

Na slici 3.6. uočavamo fraktalnu prirodu kaotičnog dijela bifurkacijskog dijagrama. Stoga ćemo na ovom mjestu pokazati na koji način je bifurkacijski dijagram logističkog preslikavanja povezan s jednim od najpoznatijih fraktala, tzv. Mandelbrotovim skupom.

Jednadžba logističkog preslikavanja $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ se na jednostavan način može transformirati i prikazati u obliku: $x_{n+1} = x_n^2 + c$, što daje isti oblik kao iteracijska formula Mandelbrotovog skupa. Ako promatramo posljednju jednadžbu za vrijednosti c iz intervala $[-2, \frac{1}{4}]$, dobivamo bifurkacijski dijagram spomenutog logističkog preslikavanja. Vidimo stoga da bifurkacijski dijagram ima fraktalne karakteristike: ispunjen je kopijama samog sebe (slika 3.7).[15]



Slika 3.7. Usporedba bifurkacijskog dijagrama logističkog preslikavanja i Mandelbrotovog skupa

3.3. Fraktali

"Fraktal" (*fractus; frangere*=slomiti) je termin koji je veoma poznat u svijetu matematičara, znanstvenika i laika, a dolazi od B.Mandelbrota 1975. godine. Beskonačnim ponavljanjem nekog iterativnog postupka nastaju objekti zvani fraktali koji imaju dva bitna svojstva: "samosličnost" i fraktalnu dimenziju te predstavljaju način kako razum gleda na beskonačnost. "Samosličnost" je važno svojstvo fraktala koje znači da se uvećanjem bilo kojeg dijela fraktala dobije slika koja je slična onoj od koje se krenulo bez obzira na stupanj uvećanja. Drugo svojstvo je fraktalna dimenzija. Dimenzije navedenih matematičkih oblika izražavaju se razlomcima, a ne cijelim brojevima. Fraktalna geometrija pokušava opisati prirodu na prikladniji način od Euklidske geometrije.

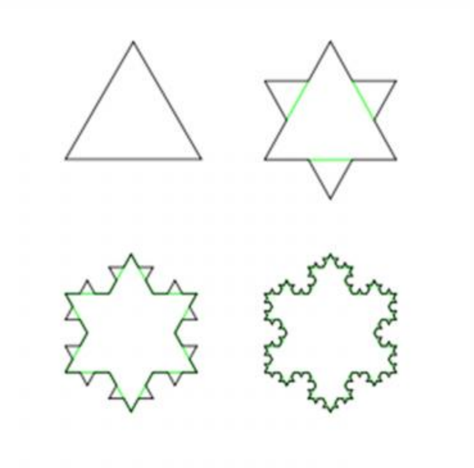
Topološka dimenzija jednog objekta je intuitivno poznata. Plohe imaju dimenziju dva, crte dimenziju jedan, a predmeti u prostoru imaju dimenziju tri. Pokazalo se da ta topološka dimenzija nije dovoljno općenita da obuhvati sve vrste skupova koje nalazimo u prirodi i u matematičkim modelima. Kao primjer se promatraju dimenzije neke obale mora. Linija se može aproksimirati nekom krivuljom što znači da joj je dimenzija manja od 2. Kada se gleda realno, ona je u limesu veća od 1. Takav objekt ima dimenziju koja nije cijeli broj i za njega se kaže da ima fraktalnu dimenziju.

Rečeno riječima utemeljitelja fraktalne geometrije B. Mandelbrota: brjegovi nisu stošci, oblaci nisu kugle i munja nije ravna crta. U tom slikovitom obrazloženju Mandelbrot „oživotvoruje“ elemente Euklidske geometrije.

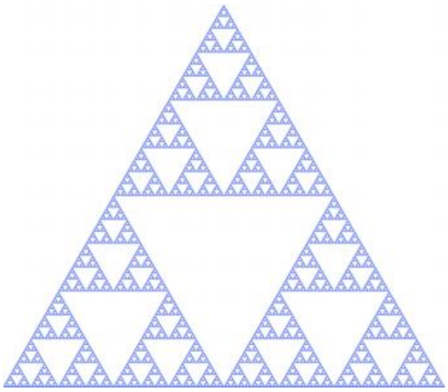
Fraktalna geometrija omogućava mnogo bolje i jednostavnije opisivanje objekata u prirodi oko nas. Njezino oruđe su iterativni procesi koji iz prethodnih vrijednosti/točaka proizvode nove, što nakon beskonačno iteracija daje završni skup točaka-fraktal.

Na taj način je kompleksne strukture poput onih u prirodi moguće kreirati jednostavnim kodom pomoću kompjutora. Moguće je zadati iteracijske metode koje generiraju brjegove, oblake i munje.[1]

Već spomenuti Mandelbrotov skup jedan je od najpoznatijih primjera fraktala, uz Kochinu pahuljicu (slika 3.8.) ili trokut Sierpinskog (slika 3.9.).[2]



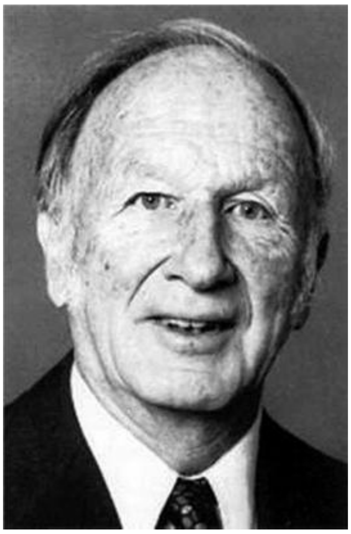
Slika 3.8. Prve četiri iteracije Kochine pahuljice



Slika 3.9. Trokut Sierpinskog

3.4. Lorenzov sustav

Prva osoba koja je sustavno radila na teoriji kaosa bio je matematičar u koži meteorologa, Edward Lorenz (slika 3.10.), koji je simulacijama uz pomoć računala pokušavao riješiti problem predviđanja vremena. U računalo je unio sustav od 12 jednadžbi koje su trebale modelirati vrijeme, a svaka od jednadžbi određivala je promjenu jednog od bitnih metereoloških pokazatelja: tlaka, temperature, vlažnosti zraka, jakosti i smjer vjetra, itd.



Slika 3.10. Edward Norton Lorenz (1917. - 2008.)
meteorolog i matematičar koji se smatra
"ocem teorije kaosa"

Ovaj kompjutorski program teoretski je predviđao kakvo bi vrijeme moglo biti. Nakon godinu dana pokušao je ponovno dobiti isti niz brojeva, ali je zbog uštede vremena niz počeo iz sredine, umjesto od početka. Unio je podatke u svoje računalno generirane liste i ostavio stroj da radi. Kada se vratio do računala bio je iznenađen vidjevši kako je niz izgledao drugačije od prijašnjeg. Kako je računalo spremalo brojeve na 6 decimala, a on je ispisivao samo 3 decimale radi uštede papira, rješenja su bila drugačija: npr. u izvornome nizu broj je bio .506127, a on je utipkao samo prve tri decimalne znamenke .506. Ovaj efekt bitne razlike u odnosu na neznatne promjene u početnim vrijednostima poznat je kao „efekt leptira“. Naziv dolazi iz činjenice da je razlika u ishodišnim vrijednostima bila toliko neznatna da se mogla usporediti sa zamahom krila leptira. Neznatna pojava kao mahanje krila leptira neće trenutno učiniti znatniji pomak u atmosferi, ali ono što atmosfera čini tijekom vremena, razlikuje se od onoga što bi se dogodilo da tog zamaha nije bilo. Iz svega ovoga Lorenz je ustvrdio da je nemoguće točno predvidjeti vrijeme. Uočio je vezu između neperiodičnog ponašanja i nepredvidljivosti, prepoznavši u kaotičnim sustavima fini geometrijski ustroj: red prerušen u kaos. Pojednostavivši svoj sustav, Lorenz je broj jednadžbi smanjio na samo 3, u odnosu na početnih 12.[2,13]

Te tri jednadžbe predstavljaju pojednostavljen matematički model za atmosfersku konvekciju:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

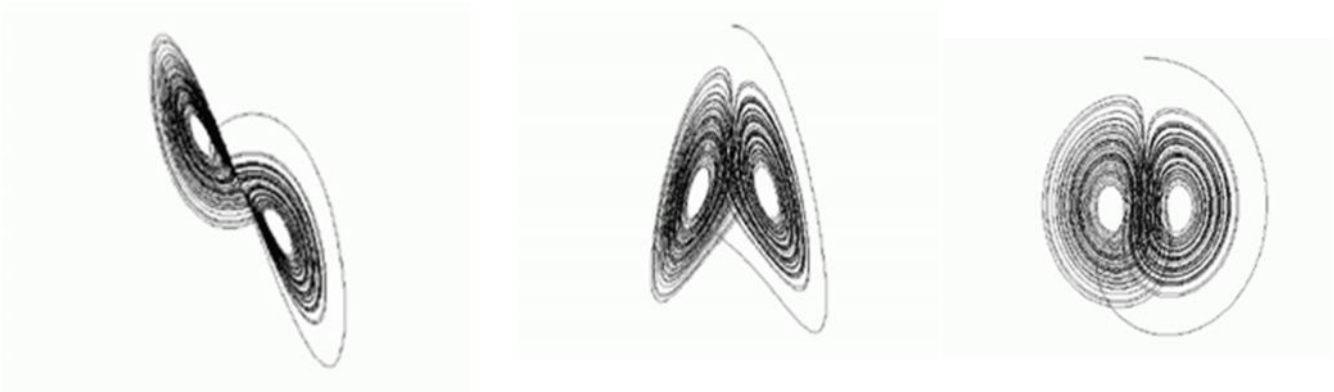
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

U sustavu gornjih jednadžbi x, y i z predstavljaju stanje sustava, t je vrijeme, a σ, ρ i β su parametri sustava: σ (sigma) je Prandtlov broj (omjer kinematičke viskoznosti i termalne difuzivnosti), ρ (ro) je Rayleighov broj (određuje je li prijenos topline primarno u obliku kondukcije ili konvekcije) i β (beta) je geometrijski faktor.

Vrijednosti ova tri parametra za koje Lorenzov sustav pokazuje kaotično ponašanje su: *σ=10, ρ=28 i β=8/3*. Grafički prikaz jednadžbi nasumičnog ponašanja za ovaj izbor parametara pokazuje dvostruku spiralu, što je neobično jer su ranije bile poznate samo dvije vrste dinamika: stalno stanje (varijable stabiliziraju svoje vrijednosti) i periodično ponašanje (varijable sustava ulaze u periodični režim ponašanja, beskonačno ponavljajući svoje vrijednosti). Međutim, ovdje su Lorenzove jednadžbe definitivno slijedile neku drugu logiku – uvijek su opisivale spiralu. Svoja je otkrića 1963. godine objavio u jedinom časopisu u kojem je mogao – meteorološkom što je rezultiralo neuočavanjem njegovih otkrića sve do kasnijih godina.[2]

Grafički prikaz svoje tri diferencijalne jednadžbe iscrtao je u faznom prostoru koji je opisivao promjene varijabli sustava. Na slikama se vidi trajektorija koja predstavlja skup svih točaka sustava kroz koje prolazi u svojoj evoluciji, tj. u određenom vremenu. Na ovaj način Lorenz je prikazao red u kaosu i kaos u redu te su navedene slike postale zaštitni znak teoretičara kaosa. Promatrana trajektorija, koja ima oblik leptira ili sovinih očiju, je kaotična jer u niti jednoj točki ne siječe samu sebe, nijedno stanje sustava se ne ponavlja i nepredvidljiva je, a zanimljivo je kako se nalazi u ograničenom prostoru jer nikad ne „bježi“ u beskonačnost. Većina ljudi kaotično stanje promatra kao slučajno i nepovezano, ali ova krivulja ima svoj oblik, beskonačno kruži oko dvije fiksne točke (tzv. atraktora) te se ne smiruje.[16]



a) Graf X-Y   b) Graf X-Z   c) Graf Y-Z

Slika 3.11. Kaotično ponašanje varijabli Lorenzovog sustava

Zanimljivo je napomenuti da se i određeni tip kemijskih reakcija također može opisati Lorenzovim jednadžbama.[17]

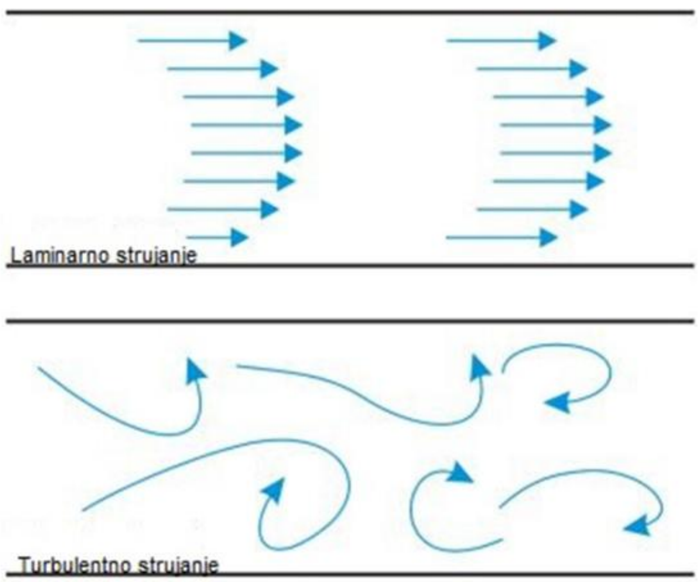
3.5. Turbulencija fluida

Promatrajući protjecanje realnog fluida kroz ravnu cijev može se vidjeti da je pri manjim brzinama strujanje laminarno, u slojevima. U slučajevima gdje brzina fluida prijeđe kritične vrijednosti, govori se o turbulentnom gibanju čije su karakteristike miješanje slojeva fluida, čestice se raspoređuju među slojevima i nastaju nepredvidivi vrtlozi. Odgovor za nepredvidivo, kaotično ponašanje fluida se nalazi u teoriji determinističkog kaosa.

Pod pojmom deterministički smatra se kako je moguće jednoznačno odrediti sadašnje stanje poznavajući prošla stanja (npr. brzina fluida) na temelju determinističkih jednadžbi koje bi mogle opisati dinamički sustav. Nastupanje kaosa kao složenog ponašanja dinamičkog sustava opisanog nelinearnim jednadžbama čini sustav nepredvidljivim.

Teorija determinističkog kaosa govori kako pri malim razlikama u početnim uvjetima dolazi do eksponencijalne divergencije u vremenu fazne putanje dinamičkog sustava.

Postavlja se pitanje kada strujanje prestaje biti laminarno i prelazi u turbulentno. Kako bi se to znalo objasniti, promatraju se određene karakteristike fluida: koeficijent viskoznosti, gustoća fluida te karakteristike cijevi: oblik i presjek cijevi.

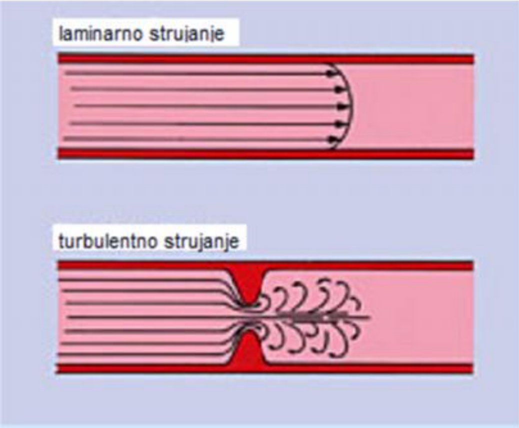


Slika 3.12. Prikaz laminarnog i turbulentnog strujanja

Primjer:

U slučaju kad cijev ima polumjer 1 cm, kritična brzina za strujanje vode kroz tu cijev iznosi 0,1 m/s, dok za strujanje zraka kroz tu istu cijev kritična brzina iznosi 2 m/s.

Čovjekove krvne žile (aorte) su također poput cijevi kroz koje protječe krv (fluid) te je pri normalnim uvjetima strujanje laminarno. Smetnje poput suženja krvnih žila i ubrzani rad srca uzrokuju povećani krvni tlak te tada može nastupiti turbulentno strujanje što stvara šum u protoku krvi.[18]



Slika 3.13. Strujanje krvi kroz krvne žile

4. ZAKLJUČAK

Cjelokupni rad i napredak znanosti i tehnologije teži što boljem razumijevanju problema koji nas okružuju. Kako se znanost razvijala, tako su ljudi mislili da su riješili gotovo sve probleme i da će moći uspostaviti kontrolu nad prirodnim procesima i pojavama, budući da se vjerovalo (prema determinizmu) da je sve povezano uzročno-posljedičnim vezama. Međutim, jedno otkriće s početka 20. stoljeća nam je pokazalo da je svijet puno kompliciraniji nego što možemo zamisliti i kako se još puno toga može otkriti. To veliko otkriće je otkriće pojma kaosa, kroz teoriju kaosa koju nam je približio ponajprije poznati francuski matematičar Henry Poincaré, prvi uočivši kako se mnogi jednostavni nelinearni deterministički sustavi mogu ponašati na kaotičan način, a potom Edward Lorenz, prva osoba koja je je sustavno radila na teoriji kaosa i uočila vezu između neperiodičnog ponašanja i nepredvidljivosti, prepoznavši u kaotičnim sustavima fini geometrijski ustroj: red prerušen u kaos. U ovom radu kaos je opisan kroz različite grane ljudskog djelovanja (psihologija, medicina, ekonomija), s posebnim naglaskom na matematičkoj karakterizaciji kaosa, uz pobliže upoznavanje s pojmovima determinističkog kaosa, logističkog preslikavanja, Lorenzovog sustava i fraktalima. Kroz računalni dio vidjeli smo kako se i u najjednostavnijim nelinearnim modelima može pojaviti kaos, što ukazuje na njegovu možda i skrivenu sveprisutnost i u našem današnjem, naizgled uređenom svijetu.

"Ne bojte se savršenstva - nikada ga nećete doseći"
Salvador Dali

5. POPIS SIMBOLA

Logističko preslikavanje

λ	parametar logističkog preslikavanja
n	redni broj generacije
x_0	nulta generacija (sjeme)
x_n	n-ta generacija
c	aditivni parametar u Mandelbrotovoj jednadžbi

Lorenzov sustav

ρ	Rayleighov broj
σ	Prandtlov broj
β	geometrijski faktor
x, y, z	koordinate stanja sustava
t	vrijeme

6. LITERATURA

1. Žugaj, M., *Teorija kaosa i organizacija*, Zbornik radova 21 (1996), Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 1996., str. 51. - 62.
2. http://www.wikipedia.org/
3. http://www.hupi.hr/tino/uvod.htm
4. http://www.pmfst.unist.hr/~luketin/Ivadip.htm
5. http://www.crystalinks.com/Chaos_Mythology.html
6. Jurina, M., Jurković, S., Pušeljić M.: *Elementi organizacije policije*, Ministarstvo unutranjih poslova Republike Hrvatske, Zagreb, 1995., preuzeo Žugaj, M.
7. Kolaković M., Vrankić,I., *Teorija kaosa i njezina primjena u ekonomiji*, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, godina 2, broj 1, 2004.
8. http://iknowfirst.com/stock_market_forecast_chaos_theory_revealing_how_the_stock_market_works/
9. http://believeperform.com/performance/eeg-alpha-waves-sport/
10. http://www.chaos.umd.edu/
11. Determinizam; http://struna.ihjj.hr/naziv/laplaceov-determinizam/21050/
12. Deterministički kaos; http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/1-2-Deterministicki_kaos.htm
13. Hirsch, M. W., Smale, S., Davaney, R.L., *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Second Edition*, Academic Press, 2004., str.303-356
14. Wolfram Demonstrations Project; http://demonstrations.wolfram.com/
15. http://classes.yale.edu/fractals/Mandelset/MandelDef/LogisticMand/LogisticMand.html
16. http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/1-2-Deterministicki_kaos.htm
17. Poland, D., *Cooperative Catalysis and Chemical Chaos: A Chemical Model for the Lorenz Equations*, *Physica D* **65**(1–2), 1993 pp. 86–99. doi:10.1016/0167-2789(93)90006-M.
18. http://www.gfos.unios.hr/portal/images/stories/studij/sveucilisni-preddiplomski/fizika/Predavanje3.pdf
19. Wolfram Math World; http://mathworld.wolfram.com/

7. PRILOZI

Svi računalno generirani grafički prikazi u radu izrađeni su u programskom paketu *Mathematica* i preuzeti su sa stranice *Wolfram Demonstrations Project* i *Wolfram Math World*.[14,19]

1. Logističko preslikavanje – generacijski prikaz[14]

```
Manipulate[
 ListLinePlot[
     If[ drugi,
      {NestList[λ # (1 - #) &, x0, maxT],
       NestList[λ # (1 - #) &, If[x0 + roz < 0, 0, If[x0 + roz > 1, 1, x0 + roz], x0 + roz], maxT]},
       NestList[λ # (1 - #) &, x0, maxT]] ,
     PlotRange → {0, 1},
     PlotStyle → {Directive[RGBColor[.6, .73, .36], Thick] ,
    If[drugi, RGBColor[1, .47, 0], RGBColor[.6, .73, .36]]},
     DataRange → {0, maxT},
     ImageSize → {600, 350}, ImagePadding → 20
   ],
 {{λ, 2, "parameter λ"}, 0, 4, 0.01, Appearance → "Labeled"},
 {{x0, 0.3, "initial value x0"}, 0, 1, 0.01, Appearance → "Labeled"},
 {{maxT, 50, "end time"}, 10, 100, 1},
 {{drugi, True, "second solution?"}, {True, False}},
 {{roz, 0, "difference h between initial values"}, -x0, 1 - x0, 0.01,
  Appearance → "Labeled"}
]
```

2. Logističko preslikavanje – „paukova mreža“[14]

```
Manipulate[
 Show[Plot[{μ x - μ x^2, Nest[μ # - μ #^2 &, x, k], x}, {x, 0, 1}, PlotStyle → Gray,
   Frame → True, PlotRange → {{0, 1}, {0, 1}}, AspectRatio → 1],
  Graphics[
   Flatten[
     MapIndexed[{Hue[#2[[1]] / n], Line[{{#, If[# == x0, 0, #]}, {#, μ # - μ #^2}}],
        Line[{{#, μ # - μ #^2}, {μ # - μ #^2, μ # - μ #^2}}]} &,
    NestWhileList[μ # - μ #^2 &, x0, #1 ≠ μ #2 - μ #2^2 &, 2, n]]]],
  ImageSize → {500, 400}, ImagePadding → {{20, 10}, {30, 20}}],
 {{n, 100}, 1, 200, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{μ, 2.5}, 0, 4, Appearance → "Labeled"},
 {k, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, ControlType → Setter},
 {{x0, 0.855, "x0"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"}, AutorunSequencing → {2, 3, 4}]
```

3. Logističko preslikavanje – bifurkacijski dijagram[19]

```
LogisticMap=Compile[{{μ,_Real}},({μ,#}&)/@Union[Drop[NestLis
t[μ # (1-#)&,.2,300],100]]];
f=Table[LogisticMap[μ],{μ,3.0,4,.0005}];//Timing
ListPlot[Flatten[f,1],PlotStyle→{Red,AbsolutePointSize[.001]
},Frame→True,FrameLabel→TraditionalForm/@{λ,x},PlotLabel→Tr
aditionalForm[xn+1==λxn(1-xn)]]
```

ŽIVOTOPIS

Monika Marković rođena je 14.10.1990. u Vinkovcima gdje je završila osnovnu školu i gimnaziju. U srpnju 2009. godine upisala je Farmaceutsko-biokemijski fakultet u Zagrebu, smjer Farmacija, na kojem je bila tri godine, a u rujnu 2012. godine upisala je preddiplomski Sveučilišni studij Kemijsko inženjerstvo na Fakultetu kemijskog inženjerstva i tehnologije u Zagrebu. Uz obavezne aktivnosti koje je imala, bila je član Franjevačke mladeži gdje je stekla iskustvo vođenja škole za animatore.