

# Optimizacijski problemi u kemijskom inženjerstvu

---

**Mezdić, Ana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Chemical Engineering and Technology / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:149:348738>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Chemical Engineering and Technology University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE**

**SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ**

**Ana Mezdíć**

**OPTIMIZACIJSKI PROBLEMI U KEMIJSKOM INŽENJERSTVU**

**ZAVRŠNI RAD**

**Zagreb, rujan 2022.**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Kandidatkinja Ana Mezdić

Predala je izrađen završni rad dana: 16. rujna 2022.

Povjerenstvo u sastavu:

doc. dr. sc. Erna Begović Kovač, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilište u Zagrebu

izv. prof. dr. sc. Vladimir Dananić, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilište u Zagrebu

dr. sc. Lidija Furač, viša predavačica, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilište u Zagrebu

povoljno je ocijenilo završni rad i odobrilo obranu završnog rada pred povjerenstvom u istom sastavu.

Završni ispit održat će se dana: 21. rujna 2022.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE**

**SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ**

**Ana Mezdic**

**OPTIMIZACIJSKI PROBLEMI U KEMIJSKOM INŽENJERSTVU**

**Mentorica:** doc. dr. sc. Erna Begović Kovač

*Članovi povjerenstva:*

1. doc. dr. sc. Erna Begović Kovač
2. izv. prof. dr. sc. Vladimir Dananić
3. v. pred. dr. sc. Lidija Furač

**Zagreb, rujan 2022.**

## SAŽETAK

U ovome radu opisuju se neki optimizacijski problemi s kojima se možemo susresti u kemijskom inženjerstvu. Formulacija problema i način njihovog rješavanja prikazani su na primjeru optimizacije toka fluida i provođenja topline. Obrađuju se i formuliraju problemi uvjetne optimizacije više varijabla te neke metode linearnog programiranja za njihovo rješavanje.

Prilikom rješavanja numeričkih primjera problema linearnog programiranja, korišten je programski paket MATLAB.

**Ključne riječi:** *optimizacijski problem, linearno programiranje, uvjetna optimizacija, tok fluida, provođenje topline*

## SUMMARY

This thesis describes certain optimization problems that can be encountered in chemical engineering. The formulation of those problems and their possible solutions are illustrated on the examples of the fluid flow optimization and the heat transport system. Additionally, the multivariable optimization with constraints is discussed as well as some linear programming methods.

Software package MATLAB has been used when solving numerical examples of linear programming problems.

**Keywords:** *optimization problem, linear programming, optimization with constraints, fluid flow, heat transport system*

# SADRŽAJ

1.	UVOD.....	1
1.1.	OPTIMIZACIJA PROCESA .....	1
1.2.	OPTIMIZACIJSKI PROBLEMI .....	1
2.	NEKE FORMULACIJE OPTIMIZACIJSKIH PROBLEMA U INŽENJERSTVU .....	3
2.1.	TOK FLUIDA .....	3
2.1.1.	OPTIMIZACIJA SPREMNIKA ZA SKLADIŠTENJE FLUIDA.....	3
2.1.2.	OPTIMIZACIJA KONFIGURACIJA PUMPI .....	6
2.2.	PROVOĐENJE TOPLINE .....	9
2.2.1.	OPTIMALNA DEBLJINA IZOLACIJE .....	9
2.2.2.	OPTIMIZACIJA JEDNOSTAVNE MREŽE IZMJENJIVAČA TOPLINE .....	12
3.	RJEŠAVANJE PROBLEMA UVJETNE OPTIMIZACIJE VIŠE VARIJABLI.....	14
3.1.	FORMULACIJA PROBLEMA.....	14
3.2.	METODA LINEARNOG PROGRAMIRANJA.....	17
3.2.1.	FORMULACIJA PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA .....	17
3.2.1.1.	KONCEPT DUALNOSTI .....	20
3.2.2.	SIMPLEKS METODA.....	21
3.2.3.	NESIMPLEKS METODE.....	25
3.2.3.1.	KHACHIJANOVA ELIPSOIDNA METODA .....	25
3.2.3.2.	KARMARKAROVA METODA UNUTARNJE TOČKE .....	25
3.2.4.	CJELOBROJNO LINEARNO PROGRAMIRANJE.....	27
4.	NUMERIČKI PRIMJERI .....	28
4.1.	PRIMJER 1 .....	28
4.2.	PRIMJER 2 .....	30
5.	ZAKLJUČAK.....	31
6.	LITERATURA .....	32

## 1. UVOD

Optimizacija u području kemijskog inženjerstva potrebna je kako bi se resursi iskoristili na učinkovit način, ali i kako bi se smanjio utjecaj procesa na okoliš [1]. Neke od uobičajenih primjena su određivanje minimalnog troška, maksimalnog profita, minimalne pogreške, optimalanog dizajna, optimalnog upravljanja i sl. [2].

### 1.1. OPTIMIZACIJA PROCESA

Optimizacija procesa uključuje određivanje procesnih parametara (temperatura, tlak, pH, vrijeme itd.) koji osiguravaju maksimalan učinak. Npr. u kemijskoj industriji pravilan odabir vremena šarže daje maksimalnu selektivnost za seriju reaktora. Izmjene u dizajnu postrojenja i radnim postupcima su provedene kako bi se smanjili troškovi i zadovoljila ograničenja, s naglaskom na poboljšanje učinkovitosti i povećanje profitabilnosti [1]. Ova se tehnika proučava u svim područjima inženjerstva, znanosti i ekonomije. Mnoge matematičke teorije za rješavanje optimizacijskih problema počele su se formulirati šezdesetih godina prošloga stoljeća s otkrićem i razvojem računala. S proširenjem mogućnošću računala, veličina i složenost problema koji se mogu riješiti optimizacijskim tehnikama se također širi [3].

### 1.2. OPTIMIZACIJSKI PROBLEMI

Definiranje i formuliranje problema predstavlja ključan korak u optimizaciji [3]. Svaki optimizacijski problem može se opisati određenom funkcijom cilja  $f$  kojeg želimo optimizirati. Dakle, traži se lokalni maksimum ili minimum. Točka lokalnog ekstrema  $x^*$  mora zadovoljavati nužan uvjet  $f'(x^*) = 0$  i dovoljan uvjet  $f''(x^*) > 0$  (znači da je u  $x^*$  lokalni minimum) ili  $f''(x^*) < 0$  (znači da je u  $x^*$  lokalni maksimum). Stoga, do lokalnog ekstrema se dolazi tako da se prvo derivira funkcija cilja i derivacija izjednači s 0. Na taj se način dobivaju kandidati za lokalni ekstrem, tzv. kritične točke. Ako ima više kandidata, računa se druga derivacija funkcije cilja i provjeri karakter lokalnog ekstrema odnosno koja kritična točka je minimum ili maksimum.

Optimizacijski problemi se javljaju pri proučavanju strujanja fluida, procesa prerade nafte, provođenja topline, kada se promatraju kemijski reaktori ili postrojenja za pročišćavanje otpadnih voda i sl. [2]. U sljedećem poglavlju detaljnije će se obraditi optimizacijski problemi prilikom strujanja fluida te provođenja topline.



## 2. NEKE FORMULACIJE OPTIMIZACIJSKIH PROBLEMA U INŽENJERSTVU

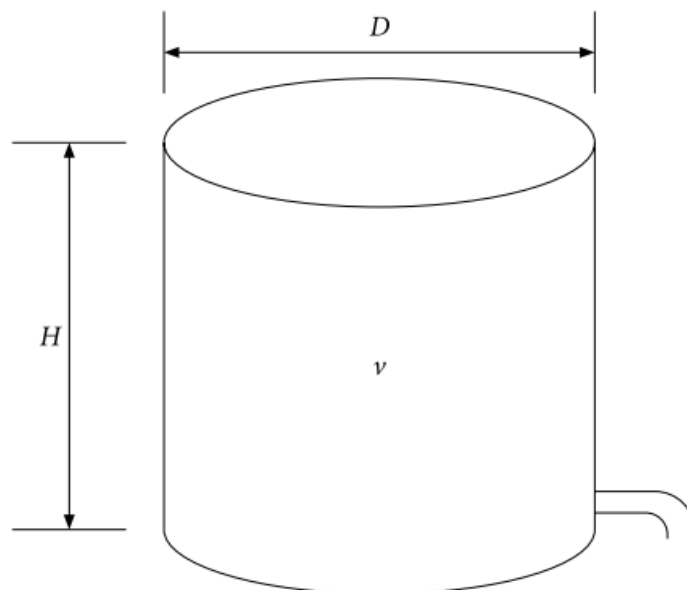
### 2.1. TOK FLUIDA

Optimizacija protoka fluidnih sustava obuhvaća širok spektar problema. Složeniji problemi javljaju se u planiranju vodnih resursa, u vodovodnim mrežama i kanalizacijskim sustavima, u projektiranju cjevovoda za transport nafte, plina i naftnih proizvoda i sl. Takvi sustavi rade tijekom dugog vremenskog perioda pa je nužno odabrati i dizajnirati kvalitetan sustav koji će se graditi. Jednostavniji optimizacijski problemi predstavljaju protok kroz jednu cijev, strujanje u paralelnim cijevima, izmjenjivače topline i sl. [3]. U nastavku će na primjeru spremnika za skladištenje fluida te na mreži pumpi biti pokazan primjer optimizacije dizajna sustava protoka fluida.

#### 2.1.1. OPTIMIZACIJA SPREMNIKA ZA SKLADIŠTENJE FLUIDA

Matematičku formulaciju problema pokazat će se na pojednostavljenom primjeru. Spremnik u obliku cilindra određen je svojim volumenom ( $V$ ) koji se izražava kao umnožak površine baze i visine spremnika:  $V = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi H = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 D^2 H$ .

Funkciju cilja  $f$  čini cijena spremnika koju je potrebno minimalizirati. Stoga je potrebno odrediti optimalni promjer i visinu spremnika prikazanog na Slici 2.1.



Slika 2.1 Spremnik za tekućine [1].

Prema S. Dutta [1], optimalni dizajn za funkciju cilja  $f$  dobiva se rješavajući nelinearni problem:

$$\min_{H,D} f \equiv c_s \pi D H + c_t \left(\frac{\pi}{2}\right) D^2. \quad (2.1)$$

$$\text{uz uvjete} \quad V = \left(\frac{\pi}{4}\right) D^2 H, \quad (2.2)$$

$$D \geq 0, H \geq 0. \quad (2.3)$$

Količina potrebnog materijala proporcionalna je oplošju spremnika, stoga će definirati cijenu spremnika. Oznaka  $c_s$  predstavlja cijenu po jedinici bočne površine plašta spremnika, dok  $c_t$  predstavlja cijenu po jedinici površine gornjeg i donjeg djela spremnika. Problem se pojednostavljuje zanemarivanjem gornjeg i donjeg ograničenja eliminacijom varijable  $H$  iz jednadžbe (2.1) tako da se izrazi preko volumena. Na taj se način dobiva problem bez dodatnog uvjeta:

$$\min f \equiv 4c_s \frac{V}{D} + c_t \left(\frac{\pi}{2}\right) D^2. \quad (2.4)$$

Točka minimuma mora zadovoljavati nužan uvjet za postizanje lokalnog ekstrema, odnosno derivacija funkcije u točki ekstrema jednaka je nuli. Stoga deriviramo funkciju  $f$  te derivaciju izjednačimo s nulom. Dobijemo:

$$\frac{df}{dD} = -4 c_s \frac{V}{D^2} + c_t \pi D = 0, \quad (2.5)$$

iz čega slijedi da je

$$D = \left(\frac{3}{\pi c_t}\right)^{1/3}, H = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{c_t}{c_s}\right)^{2/3},$$

uz omjer varijabli

$$\frac{H}{D} = \frac{c_t}{c_s}.$$

Kako je već spomenuto, ovo je primjer pojednostavljenog slučaja kod kojeg se do rješenja dolazi jednostavnim diferencijalnim računom [1].

S druge strane, za realni i složen sustav, u obzir se moraju uzeti sve varijable i parametri koje utječu na optimizaciju dizajna spremnika. Takva formulacija problema primijenit će se na povišeni kružni spremnik za vodu. Postoji velik broj parametara koji određuju dizajn takvog spremnika; kapacitet spremnika, debljina zida, debljina podne ploče, debljina podne grede i sl. U ovom su istraživanju varijable dizajna, potrebne za minimalizaciju troškova, debljina zida ( $X_1$ ), debljina podne ploče ( $X_2$ ) te debljina podne grede ( $X_3$ ). Slijedi definiranje gornjih i donjih ograničenja spomenutih varijabli koje su produkt geometrijskih zahtjeva, minimalnih praktičnih dimenzija za konstrukciju i sl. Ograničenja za dizajn povišenog kružnog spremnika za vodu prikazane su u Tablici 2.1.

**Tablica 2.1** Sistematizacija ograničenja za povišeni kružni spremnik za vodu.

Ograničenje kapaciteta	Ograničenje vlačnog naprezanja u zidu
Ograničenje dubine gornje ploče	Ograničenje na naprezanje uslijed savijanja zida
Ograničenje naprezanja ploče	
Ograničenje protiv pucanja	Provjera naprezanja u zidu
Ograničenje podne grede	Ograničenje dubine podne ploče
Ograničenje na vezna naprezanja	Ograničenje debljine zida
Ograničenje tlaka	Ograničenje omjera

Funkcija cilja, kao konačan trošak cijelog spremnika, se prvenstveno sastoji od troška čelika i troška betona, stoga se izražava kao:

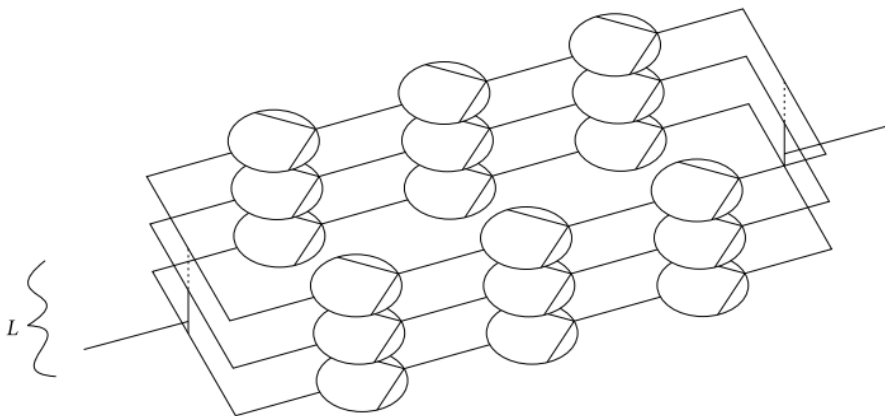
$$\begin{aligned}
 \text{Ukupni trošak} &= \text{cijena čelika} + \text{cijena betona}, \\
 \text{cijena betona} &= \text{količina betona [m}^3\text{]} * \text{cijena betona}, \\
 \text{cijena čelika} &= \text{količina čelika [kg]} * \text{cijena čelika}.
 \end{aligned}$$

Optimizacija se provodi s obzirom na različite kapacitete spremnika i različite stupnjeve betona i čelika [4].

### 2.1.2. OPTIMIZACIJA KONFIGURACIJA PUMPI

Za mnoge industrije potrošnja energije za pumpanje tekućina je vrlo visoka stoga je njihova glavna briga minimalizacija potrošnje energije kao i ukupnih troškova za sustave za pumpanje tekućina. Posljednjih godina se mnogo pažnje usmjerilo na razvoj algoritama za mješovitu cjelobrojnu optimizaciju. Jedan od najpopularnijih pristupa bio je MINLP pristup (miješano cjelobrojno nelinearno programiranje od eng. *mixed integer non-linear programming*) o kojem će se više govoriti u drugom djelu ovoga rada [5]. U nastavku će se razmatrati optimizacija toka fluida na problematici pumpanja tekućina prema S.Dutta i T. Westerlund [1].

Za određeni skup centrifugalnih pumpi, potrebno je odabrati najbolju pumpu ili konfiguraciju serijski i/ili paralelno spojenih pumpi s obzirom na zadani porast tlaka (u smislu ukupne visine) i podatke o potrebnoj snazi kao funkciji kapaciteta pumpe. Odabrana konfiguracija treba zadovoljiti zahtjeve za ukupnim potrebnim protokom tekućine i ukupnim porastom tlaka. Promatra se jednostavna konfiguracija pumpi L razine koja je sastavljena od paralelnih pumpnih linija,  $N_{p,i}$ , serijski postavljenih pumpi,  $N_{s,i}$ . Centrifugalne pumpe na istoj razini,  $i$ , jednake su veličine i brzine rotacije. Na svakoj razini, porast tlaka jednak je ukupnom potrebnom porastu tlaka dok je ukupni protok zbroj protoka kroz sve L razine. Za svaku razinu postoje dvije realne varijable i dvije cjelobrojne varijable koje se uzimaju u obzir za optimizaciju. Realne varijable su brzina rotacije ( $\omega_i$ ) te dio ( $x_i$ ) ukupnog protoka ( $V_{uk}$ ) dok se cjelobrojne varijable odnose na već spomenuti broj paralelnih pumpnih linija,  $N_{p,i}$ , i broj pumpi postavljenih u seriju,  $N_{s,i}$ . Slika 2.3. predstavlja konfiguraciju pumpi L razine.



**Slika 2.3.** Konfiguracija pumpi L razine [1].

Funkciju cilja kao ukupni trošak konfiguracije pumpi možemo izraziti sljedećom jednadžbom,

$$J = \sum_{i=1}^L (C_i + C_i' P_i) N_{p,i} N_{s,i} \quad (2.6)$$

gdje  $L$  predstavlja broj razina,  $C_i$  godišnje obroke kapitalnih troškova jedne pumpe, a  $C_i'$  i  $P_i$  trošak energije i snage za pojedinačnu pumpu na svakoj razini.

Potrebna snaga za jednu centrifugalnu pumpu kao i porast tlaka je obično u funkciji brzine rotacije ( $\omega$ ), protoka ( $V, u_k$ ) te gustoće fluida koji struji kroz pumpu:

$$P_i = f_{1,i} (\dot{V}_i, \omega_i, \rho), \quad (2.7)$$

$$\Delta p_i = f_{2,i} (\dot{V}_i, \omega_i, \rho). \quad (2.8)$$

Protok i porast tlaka kroz jednu pumpu na bilokoj razini mogu se pisati kao:

$$V_i = \frac{x_i}{N_{p,i}} V_{uk}, \quad (2.9)$$

$$\Delta p_i = \frac{1}{N_{s,i}} \Delta p_{uk}. \quad (2.10)$$

Dakle, uz poznavanje protoka, broja serijski spojenih pumpi i porast ukupnoga tlaka, brzina rotacije se može riješiti implicitno iz jednadžbi (2.8) i (2.10). Pošto funkcije  $f_1$  i  $f_2$  uglavnom nisu poznate, proizvođači pružaju podatke o potrebnoj snazi i ukupnom porastu tlaka pumpe pri konstantnoj brzini rotacije za specifičnu tekućinu određene gustoće što je u funkciji kapaciteta određene pumpe. Potrebna snaga i porast tlaka se prema tome može izraziti kao:

$$\Delta p_m = g_1 (V_m, \omega_m, \rho_m), \quad (2.11)$$

$$P_m = g_2 (V_m, \omega_m, \rho_m). \quad (2.12)$$

Preko odnosa proporcionalnosti (prema literaturnom izvoru), dobiva se:

$$V_i = \left( \frac{\omega_i}{\omega_m} \right) V_m, \quad (2.13)$$

$$\Delta p_i = \left( \frac{\omega_i}{\omega_m} \right)^2 \left( \frac{\rho}{\rho_m} \right) \Delta p_m, \quad (2.14)$$

$$\text{i } P_i = \left( \frac{\omega_i}{\omega_m} \right)^3 \left( \frac{\rho}{\rho_m} \right) P_m. \quad (2.15)$$

Kombinacijom jednadžbi (2.13)-(2.15) s funkcijama  $g_{1,i}$  i  $g_{2,i}$  može se doći do funkcija  $f_{1,i}$  i  $f_{2,i}$  koje su bile nepoznate.

Rezultati optimizacije konfiguracije pumpi ovog istraživanja predstavljani su, kao što smo u uvodnom tekstu spomenuli, kao problem nelinearnog programiranja s miješanim cijelim brojevima (MINLP) koji predstavlja karakterističan problem globalne optimizacije.

Konačno, optimizacijski se problem može izraziti sljedećom jednažbom [1]:

$$\min_{N_{p,i}, N_{s,i}, x_i, \omega_i, i=1, \dots, L} \left\{ \sum_{i=1}^L (C_i + C'_i P_i) N_{p,i} N_{s,i} \right\}, \quad (2.16)$$

uz 
$$\Delta p_i = f_{2,i}(V_i, \omega_i), \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^L x_i = 1, \quad (2.18)$$

$$\omega_i - \omega_{i,max} \leq 0, \quad (2.19)$$

gdje su 
$$P_i = f_{1,i}(V_i, \omega_i), \quad (2.20)$$

$$V_i = \frac{x_i}{N_{p,i}} V_{uk}, \quad (2.21)$$

te 
$$\Delta p_i = \frac{1}{N_{s,i}} \Delta p_{uk}. \quad (2.22)$$

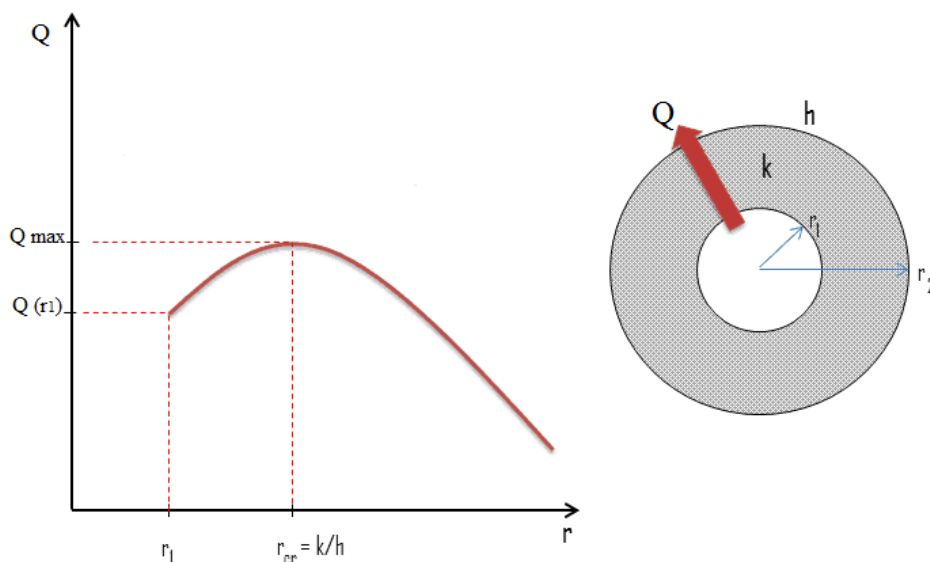
## 2.2. PROVOĐENJE TOPLINE

Opskrba i visoko učinkovito korištenje energije su problemi na svjetskoj razini, a sama potrošnja raste iz dana u dan. S prijenosom topline povezano je 80% ukupne potrošnje energije. Stoga optimizacija dizajna sustava za prijenos topline i pretvorbe toplinskoga rada postaje sve češći predmet istraživanja [6]. U ovom će se poglavlju promatrati optimizaciju sustava za prijenos topline u smislu postizanja minimalnog gubitka topline, optimalnog dizajna opreme za prijenos topline (poput izmjenjivača topline, isparivača, kondenzatora) te optimizacije mreže izmjenjivača topline (HEN) [1].

### 2.2.1. OPTIMALNA DEBLJINA IZOLACIJE

Povećanje debljine izolacije u području okomitom na smjer toka topline smanjuje brzinu prijenosa topline u ravnom zidu. Što je sloj izolacije deblji, prijenos topline je manji jer je površina prijenosa topline zida konstantna. Iz istog razloga je i konvekcijski otpor konstantan. Za slučaj provođenja topline kroz cilindrične i sferične oblike, situacija je nešto drukčija. Dodavanje izolacije povećava vanjsku površinu, a pritom dolazi do smanjenja konvekcijskog otpora na vanjskoj površini što za posljedicu ima povećanje protoka topline. Toplinski tok će rasti do postizanja tzv. kritične debljine izolacije koji se u slučaju cilindra i kugli još naziva i kritičnim radijusom. Primjer takvog trenda prikazan je na Slici 2.4. Kritični je radijus proporcionalan kondukcijskoj toplinskoj vodljivosti izolacije,  $k$  [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ], a obrnuto proporcionalan vanjskom konvekcijskom koeficijentu prijenosa topline,  $h$  [ $\text{Wm}^{-2}$ ], što se opisuje sljedećom jednačinom [7]:

$$r_{cr} = \frac{k}{h}$$



Slika 2.4 Grafički prikaz ovisnosti toplinskog toka o debljini izolacije [6].

Za pronalaženje maksimalne vrijednosti toplinskog toka i odgovarajuće debljine izolacije, potrebno je definirati funkciju cilja s obzirom na teoriju kondukcije i konvekcije pri provođenju topline.

Prijenos topline kondukcijom opisuje sljedeća jednadžba:

$$q = \frac{2\pi Lk(T_i - T_0)}{\ln \frac{r_i}{r_0}}, \quad (2.23)$$

dok se prijenos topline konvekcijom opisuje kao:

$$q = 2\pi r_0 Lh(T_0 - T_\infty), \quad (2.24)$$

Prema tome, toplinski tok koji se sastoji od kombinacije prijenosa topline kondukcijom i konvekcijom izražava se jednadžbom:

$$q = \frac{(T_i - T_\infty)}{\frac{1}{2\pi Lk} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{2\pi r_0 Lh}}, \quad (2.25)$$

dok je ukupni otpor prema tome:

$$q = \frac{1}{2\pi Lk} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{2\pi r_0 Lh}. \quad (2.26)$$

Da bismo postigli vrijednost maksimalnog toplinskog toka, potrebno je minimalizirati ukupni otpor prijenosa topline. Ovo je problem optimizacije jedne varijable gdje će ukupni otpor prijenosa topline,  $R$ , biti minimaliziran s obzirom na varijablu kritične debljine,  $r_0$ .

Prema tome, brzinu promjene funkcije ukupnog otpora u odnosu na promjenu varijable  $r_0$  potrebno je izjednačiti s nulom. Dobiva se:

$$\frac{dR}{dr_0} = \frac{d}{dr_0} \left[ \frac{1}{2\pi Lk} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{2\pi r_0 Lh} \right] = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{kr_0} - \frac{1}{hr_0^2} = 0, \quad (2.28)$$

$$r_0^* = r_{cr} = \frac{k}{h}. \quad (2.29)$$



Za razliku od primjera u poglavlju 2.1.1, ovdje se osim nužnog uvjeta za lokalni ekstrem mora u obzir uzeti i dovoljan uvjet. Prema tome, da bi neka točka koja zadovoljava nužan uvjet lokalnog ekstrema bila točka lokalnog minimuma funkcije  $f$ , druga derivacija funkcije  $f$  u toj točki mora biti veća od nule. Stoga računamo drugu derivaciju. Dobijemo:

$$\frac{d^2R}{dr_0^2} = \frac{d}{dr_0} \left[ \frac{1}{kr_0} - \frac{1}{hr_0^2} \right] = -\frac{1}{kr_0^2} - \frac{2}{hr_0^3} = \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{2}{hr_0} - \frac{1}{k} \right), \quad (2.30)$$

$$\left( \frac{d^2R}{dr_0^2} \right)_{r_0=r_{cr}} = \frac{h^2}{k^2} \left( \frac{2}{k} - \frac{1}{k} \right) = \frac{h^2}{k^3} > 0. \quad (2.31)$$

Supstitucijom  $r_{cr} = \frac{k}{h}$  u jednadžbu (2.25) i (2.26) konačno dolazimo do izraza za minimalni ukupni otpor prijenosu topline,  $R_{min}$ , odnosno izraza za maksimalni toplinski tok,  $q_{max}$ , pri kritičnoj debljini izolacije [1]:

$$R_{min} = \frac{1}{2\pi Lk} \ln \frac{k}{hr_i} + \frac{1}{2\pi Lk} = \frac{1}{2\pi Lk} \left[ \ln \frac{k}{hr_i} + 1 \right], \quad (2.32)$$

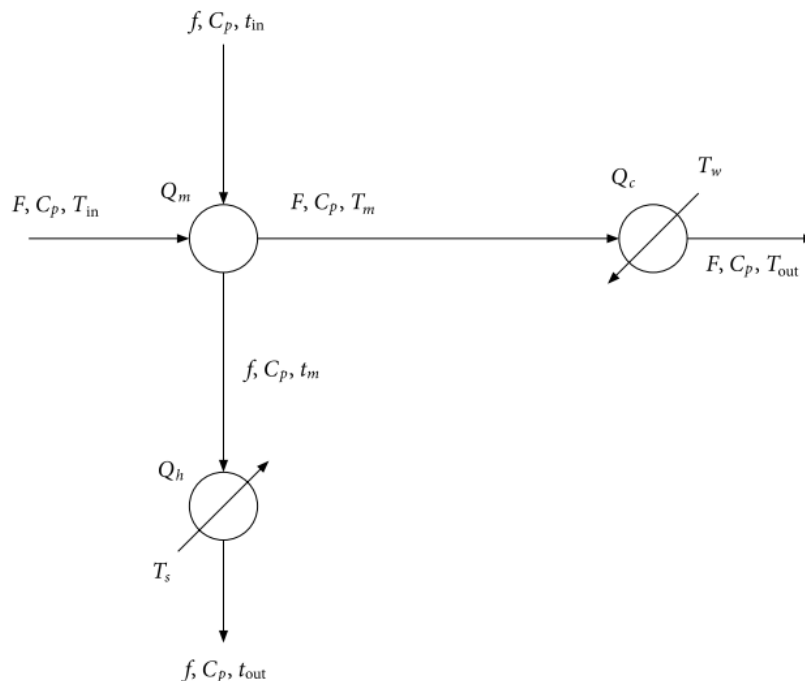
$$q_{max} = \frac{2\pi Lk(T_i - T_0)}{\left[ \ln \frac{k}{hr_i} + 1 \right]}. \quad (2.33)$$

### 2.2.2. OPTIMIZACIJA JEDNOSTAVNE MREŽE IZMJENJIVAČA TOPLINE

Glavni cilj problema optimizacije mreže izmjenjivača topline je pronaći optimalnu strukturu s minimalnim ukupnim godišnjim troškom za sklop toplih i hladnih tokova na dovodnim i ciljnim temperaturama, brzinama protoka i toplinskim kapacitetima [8].

Iskorištavanje povratne topline ima važnu ulogu u procesnoj industriji. Temelji se na činjenici da se otpadna toplina iz jednog procesa može ponovno upotrijebiti za neki drugi proces. Zbog toga je sve više pažnje usmjereno na razvijanje učinkovitog energetskog sustava za iskorištavanje povratne topline, smanjenje troškova ulaganja i potrošnje energije procesnog postrojenja.

U ovom će se odjeljku razmatrati optimizacija jednostavne mreže izmjenjivača topline (prema S. Dutta [1]) kao što je prikazano na Slici 2.5. Mreža se sastoji od tri izmjenjivača topline sa toplim i hladnim tokom pripadajućih ulaznih i izlaznih temperatura. Topli tok s fiksnim protokom  $F$  i toplinskim kapacitetom  $C_p$  zahtjeva hlađenje od ulazne temperature  $T_{in}$  do izlazne temperature  $T_{out}$  (uz  $T_{in} \geq T_{out}$ ) dok hladni tok s fiksnim protokom  $f$  i toplinskim kapacitetom  $c_p$  zahtjeva grijanje od ulazne temperature  $t_{in}$  do izlazne temperature  $t_m$  (uz  $t_m \geq t_{in}$ ). Para koju koristi grijač je na temperaturi  $T_s$  i ima toplinski rad  $Q_h$  dok hladnjak s toplinskim radom  $Q_c$  koristi rashladnu vodu na temperaturi  $T_w$ . Treći izmjenjivač topline toplinskoga rada  $Q_m$  s izlaznim temperaturama toplih i hladnih tokova,  $T_m$  i  $t_m$ , koristi se za znatnu uštedu energije pri prijenosu topline s toplog na hladni tok.



Slika 2.5 Prikaz mreže izmjenjivača topline s tri izmjenjivača topline [1].

Da bi se mogao izraziti optimizacijski problem ovog tipa, potrebno je definirati sve varijable i parametre koje funkcija cilja uključuje.

Toplinska energija, prema S.Dutta [1], može se izraziti sljedećim jednadžbama:

$$Q_c = FC(T_{in} - T_{out}), \quad (2.34)$$

$$Q_h = f c_p (t_{out} - t_{in}), \quad (2.35)$$

$$Q_m = f c_p (t_m - t_{in}) = FC_p (T_{in} - T_m). \quad (2.36)$$

Indeksi  $c, h$  i  $m$  odnose se redom na hladnjak, grijač i (treći) izmjenjivač topline.

Površina izmjene topline određivat će kapitalni trošak svakog izmjenjivača topline, a računa se iz energetske bilance:

$$Q_i = U_i A_i \Delta T_{lm}^i, \quad i \in \{c, h, m\}, \quad (2.37)$$

gdje je  $U_i$  ukupni koeficijent prijenosa topline, a  $\Delta T_{lm}^i$  srednja logaritamska temperaturna razlika koja se računa kao:

$$\Delta T_{lm}^i = \frac{\Delta T_a^i - \Delta T_b^i}{\ln \left( \frac{\Delta T_a^i}{\Delta T_b^i} \right)}, \quad i \in \{c, h, m\}, \quad (2.38)$$

$$\Delta T_a^c = T_m - T_w, \Delta T_b^c = T_{out} - T_w, \quad (2.39)$$

$$\Delta T_a^h = T_h - t_m, \Delta T_b^h = T_s - t_{out}, \quad (2.40)$$

$$\Delta T_a^m = T_{in} - t_m, \Delta T_b^m = T_m - t_{in}. \quad (2.41)$$

Konačno, optimizacija funkcije cilja tj. minimalizacija ukupnog troška koji se odnosi na kapitalni trošak izmjenjivača topline i trošak ukupne energije opisana je sljedećom jednadžbom:

$$\min \sum_{i \in \{c, h, m\}} (\hat{c}_i Q_i + \bar{c}_i A_i^\beta), \quad (2.42)$$

$$Q_i \geq 0, \Delta T_a^i \geq \varepsilon, \Delta T_b^i \geq \varepsilon, \quad i \in \{c, h, m\}. \quad (2.43)$$

gdje se troškovi  $\hat{c}_i$  i  $\bar{c}_i$  odnose na cijene energije i amortiziranog kapital, eksponent  $\beta \in [0,1]$  predstavlja ekonomiju razmjera opreme te je odabrana mala konstanta  $\varepsilon > 0$  kako bi srednja logaritamska temperaturna razlika ostala definirana [1].

### 3. RJEŠAVANJE PROBLEMA UVJETNE OPTIMIZACIJE VIŠE VARIJABLI

#### 3.1. FORMULACIJA PROBLEMA

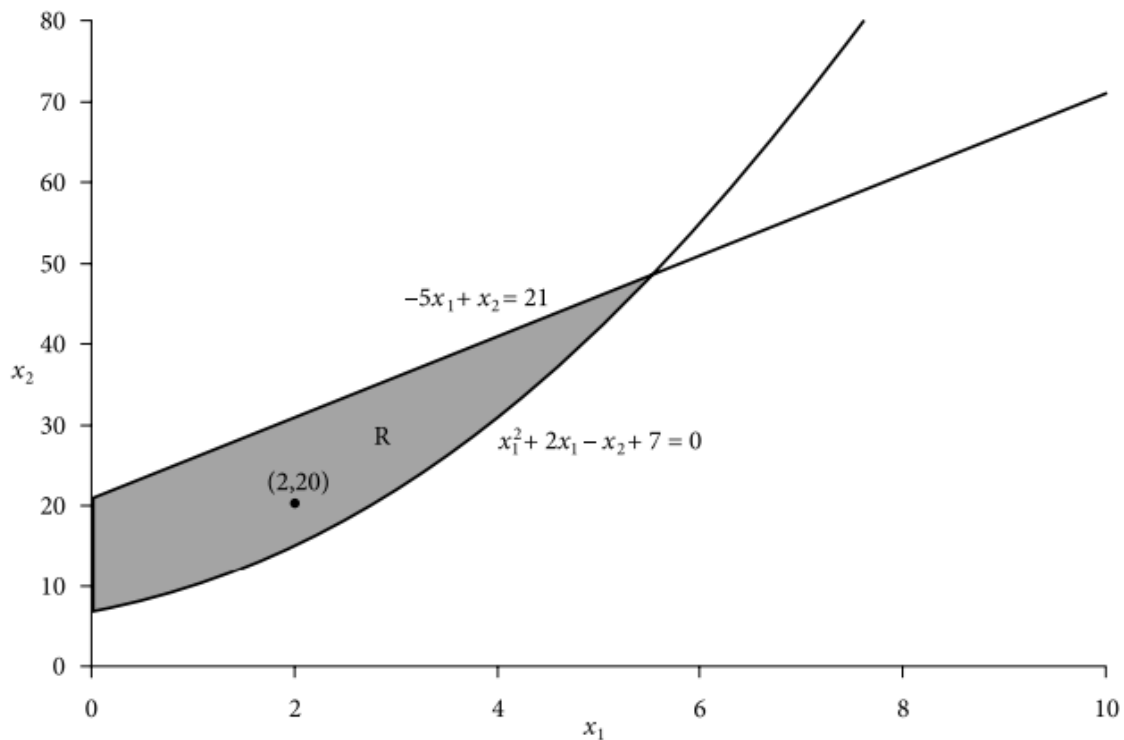
Varijable dizajna se u problemu optimizacije ne biraju proizvoljno. Često trebaju zadovoljiti dodatne specificirane zahtjeve problema. Takva dodatna ograničenja na varijable dizajna se zajednički nazivaju ograničenja ili uvjeti dizajna pa se govori o uvjetnoj optimizaciji. Većina problema s uvjetnom optimizacijom sadrži funkciju cilja s ograničenjima koja se opisuje kao:

$$\min f(X), \quad X = (x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

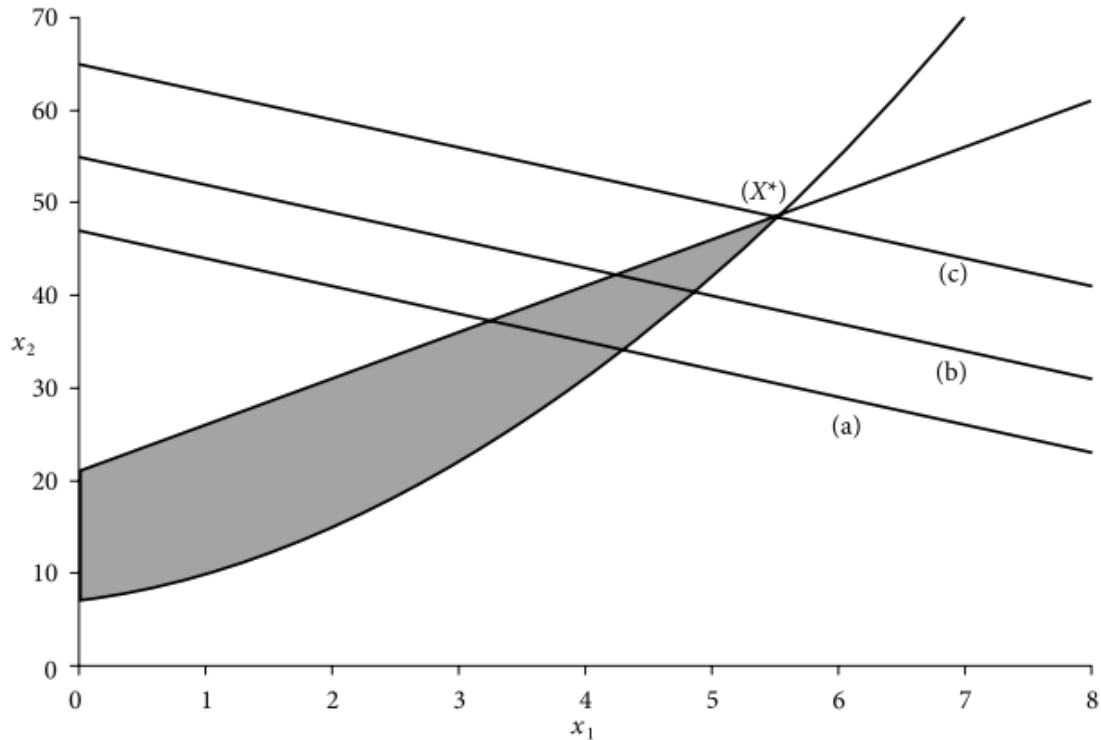
$$\text{uz uvjet} \quad c_i(X) = 0, i \in E \quad (3.2)$$

$$c_i(X) \geq 0, i \in I \quad (3.3)$$

gdje je  $f$  funkcija cilja, a  $c_i$  funkcije ograničenja optimizacije.  $E$  označava skup indeksa jednadžbe ili ograničenja jednakosti u problemu, dok  $I$  označava skup ograničenja nejednakosti te su oba konačni skupovi. Općenito, jednadžbe ograničenja se mogu preoblikovati tako da pogoduju rješavanju problema. Tako se neka jednadžba ograničenja  $c_i(X) \leq b$  može zapisati kao  $b - c_i(X) \geq 0$ . Bilo koja točka  $X$  (točka (2,20) na Slici 3.1) koja zadovoljava sva ograničenja naziva se izvedivom točkom, a skup svih takvih mogućih točaka izvedivim područjem (osjenčano područje  $R$  na Slici 3.1). Dakle, ne traži se globalni, već lokalni minimum. Ograničeni lokalni minimum  $X^*$  definira se kao  $f(X^*) \leq f(X)$  za sve moguće izvedive točke  $X$  dovoljno blizu  $X^*$  [1].



Slika 3.1 Grafički prikaz izvedivog područja [1].



**Slika 3.2** Prikaz problema uvjetne optimizacije [1].

Na Slici 3.2. prikazan je problem uvjetne optimizacije te pokazuje kako je dobivena maksimalna vrijednost funkcije cilja  $f = 3x_1 + x_2$ . Osjenčano područje  $R$  predstavlja izvedivo područje kao skup svih mogućih točaka optimizacijskog problema koje zadovoljavaju ograničenje problema:

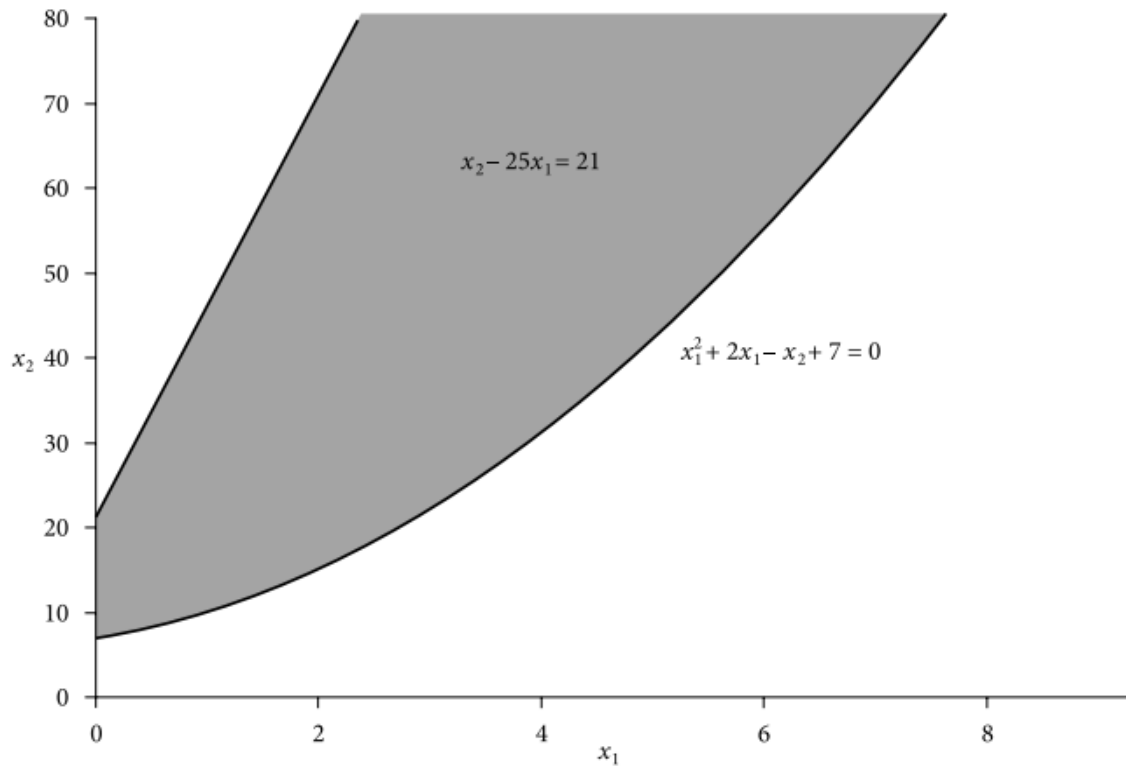
$$x_2 - x_1^2 + 2x_1 \geq 7, \quad (3.4)$$

$$x_2 - 5x_1 \leq 21, \quad (3.5)$$

$$x_1 \geq 0. \quad (3.6)$$

Dakle, svaka funkcija cilja koja za neke točke zadovoljava spomenuta ograničenja ((3.4)-(3.6)) može se optimizirati grafičkom metodom. Prema Slici 3.2, pomicanjem linije od (a) do (b), vrijednost funkcije cilja se povećava te s daljnjim pomicanjem do linije (c) dostiže maksimalnu vrijednost unutar izvedivog područja  $R$ . Maksimalna vrijednost funkcije cilja u tom slučaju postiže se u točki (5.5, 48.5).

Ovisno o prirodi ograničenja, izvedivo područje može biti ograničeno ili neograničeno. Ograničeno područje je prikazano na Slici 3.1 gdje su uvjeti dani s:  $-5x_1 + x_2 < 21$  i  $x_1^2 + 2x_1 - x_2 + 7 > 0$ . Slika 3.3. predstavlja neograničeno područje. Tu su uvjeti dani s:  $x_2 - 25x_1 < 21$  i  $x_1^2 + 2x_1 - x_2 + 7 > 0$ .



**Slika 3.3** Prikaz neograničenog izvedivog područja [1].

Problemi uvjetne optimizacije više varijabli klasificiraju se kao problemi linearnog i nelinearnog programiranja [1]. Problem nelinearnog programiranja (NLP) sadrži funkciju cilja koja je nelinearna i/ili je izvedivo područje određeno nelinearnim ograničenjima [9]. S druge strane, problem linearnog programiranja sadrži linearnu funkciju cilja s linearnim funkcijama ograničenja o kojem će se više raspravljati u sljedećem poglavlju.

## 3.2. METODA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Linearno programiranje (LP) je najjednostavnija te je jedna od najčešće korištenih tehnika uvjetne optimizacije, a možda i najučinkovitija. Pojam *programiranje* se ne odnosi se na računalno programiranje, već predstavlja optimizaciju što također vrijedi za fraze "nelinearno programiranje" ili "cjelobrojno programiranje" [3]. Cilj linearnog programiranja je optimizirati linearnu funkciju cilja uz jednadžbe i/ili nejednadžbe ograničenja uz nenegativne varijable odlučivanja. Predstavlja formalni postupak optimizacije sustava u kojim se funkcija cilja i ograničenja izražavaju linearnim kombinacijama promjenjivih veličina [10]. Glavna svrha je dobivanje točke koja optimizira funkciju cilja unutar sustava linearnih nejednadžbi te istovremeno zadovoljava sva ograničenja.

Optimizacijski problem koji se rješava linearnim programiranjem prvi je put razvijen 1930-ih za optimalnu raspodjelu resursa dok je 1939. godine L.V. Kantorovič predstavio nekoliko rješenja za probleme planiranja proizvodnje i transporta [1]. Izraz *linearno programiranje* skrojio je George Dantzig 1947. referirajući se na probleme u kojima su i funkcija cilja i funkcije ograničenja linearne, a zaslužan je za otkriće simpleks metode [3].

Postoje brojne primjene LP-a u području kemijskog inženjerstva. Metodama linearnog programiranja može se odrediti optimalan raspored radne snage i radnih strojeva u proizvodnji [3]. Primjerice, mnoge naftne tvrtke koriste LP za određivanje optimalnog rasporeda proizvoda koji će se proizvoditi iz dostupnih sirovih ulja ili u rafineriji nafte za potrebe miješanja čime se optimizira sastav s minimalnim troškovima proizvodnje [1]. Dakle, linearnim programiranjem se mogu odrediti minimalni troškovi ili maksimalan profit neke organizacije [3]. Mogućnosti koje LP pruža su brojne te se sve više koriste s ciljem optimizacije poslovnih i proizvodnih procesa.

Ovo poglavlje obrađuje formulaciju problema linearnog programiranja te metode za njihovo rješavanje kao što je simpleks metoda, nesimpleks metoda te cjelobrojno linearno programiranje.

### 3.2.1. FORMULACIJA PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Standardni oblik linearnog programiranja je prema S. Dutta [1] formuliran kao:

$$\min f(X) = c^1x^1 + c^2x^2 + \dots + c_nx_n , \quad (3.7)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \quad (3.8)$$

uz uvjet nenegativnosti:  $x_1 \geq 0,$

$$\begin{aligned}
x_2 &\geq 0, \\
&\vdots \\
x_n &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

gdje su  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ),  $b_j$ , i  $c_j$  poznate konstante, a varijable  $x_j$  se odnose na varijable odlučivanja.

Linearno programiranje može se zapisati i u matičnom obliku:

$$\min f(X) = c^T X, \tag{3.10}$$

$$\text{uz uvjet } aX = b, \tag{3.11}$$

$$X \geq 0, \tag{3.12}$$

gdje je  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ,  $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$  i  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ .

Realna matrica  $A$  dimenzija  $m \times n$  sastoji se od stvarnih ulaznih vrijednosti. Vrijednosti  $b_i$  trebale bi biti pozitivne. U suprotnom, potrebno je množiti  $i$ -to ograničenje takve negativne  $i$ -te vrijednosti s -1 da bismo dobili pozitivnu vrijednost.

Prilikom rješavanja problema linearnog programiranja uglavnom se koriste oblici u standardnoj formi kao u jednadžbama (3.7)-(3.12) [1]. Ako je izvorni problem opisan u obliku nejednadžbe, potrebno je dodati varijablu na lijevu stranu jednadžbe koja će omogućiti transformaciju u standardnu formu pogodniju za rješavanje. Takva varijabla naziva se dopunska varijabla ili *slack* varijabla, a dobiveni oblik naziva se kanonski oblik. Pri tome je potrebno obratiti pozornost je li izvorna nejednadžba oblika „veće od ili jednako“ ili „manje od ili jednako“ kako bi dopunska varijabla dobila odgovarajući predznak.

Dakle, ako je navedeno ograničenje dano u obliku nejednakosti

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i,$$

definira se dopunska varijabla  $x_{n+1} \geq 0$  tako da vrijedi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i,$$

čime dobivamo jednadžbu jednakosti pogodniju za rješavanje.

Dopunske varijable trebaju biti nenegativne kako bi se zadovoljio uvjet nejednakosti [3].



Jednostavniji problemi linearnog programiranja mogu se rješavati grafičkom metodom dok s porastom varijabli raste složenosti problema pa je pogodnije koristiti simpleks metodu. Za vrlo kompleksne sustave s nekoliko stotina varijabli koriste se računala. Grafičko rješavanje problema linearnog programiranja prikazano je u nastavku na jednostavnom primjeru s dvije nepoznate varijable.

Neka je funkcija cilja

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2,$$

uz ograničenja:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24,$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 40,$$

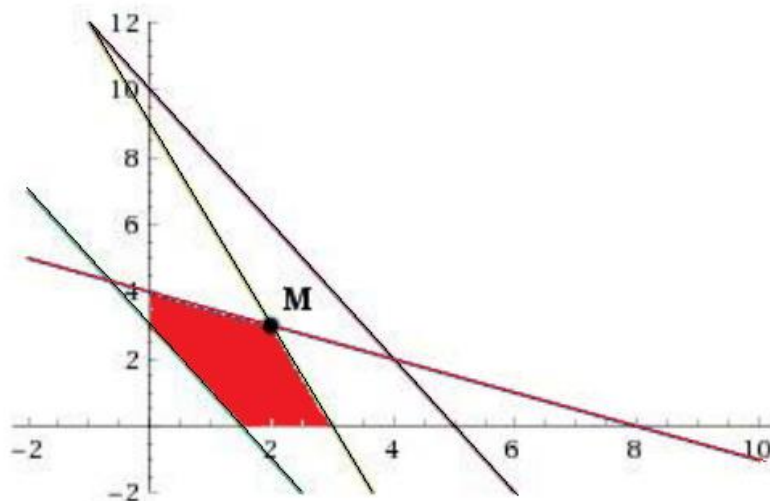
$$9x_1 + 3x_2 \leq 27,$$

$$2x_1 + 1x_2 \geq 3,$$

i uvjet nenegativnosti:

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Sva navedena ograničenja se crtaju kao pravci sa područjem rješenja koji se nalazi ili s jedne ili s druge strane pravca ovisno o uvjetu nejednakosti. Iz uvjeta nenegativnosti vidimo da se rješenje nalazi u prvom kvadrantu tako da bilokojta točka koja se ne nalazi u prvom kvadrantu ne može biti optimalno rješenje. Grafičko rješenje ovog problema prikazano je na Slici 3.4.



**Slika 3.4** Grafičko rješenje problema [11].

Crvenom bojom označeno je područje rješenja unutar kojeg se traži točka za koju funkcija cilja postiže traženu maksimalnu vrijednost. Traži se ekstremna točka koja daje maksimalni moguć rezultat. Pravac funkcije cilja se povlači prema rubovima područja rješenja dok ne

dostigne vrijednost optimalne točke koja je u ovom slučaju maksimalna i označena je slovom M. Koordinate točke M koja se nalazi na sjecištu dva pravca ograničenja predstavljaju rješenja za tražene varijable:  $x_1 = 2, x_2 = 3$ . To je točka u kojoj vrijednost funkcije postiže maksimalnu vrijednost i glasi [11]:

$$Z = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12.$$

Na ovaj način je moguće riješiti jednostavan problem s dvije nepoznanice, no kod problema s više varijabli primjenjivat će se simpleks metoda koja će biti tema sljedećeg poglavlja.

### **3.2.1.1. KONCEPT DUALNOSTI**

Dualnost je neizostavna stavka pri definiranju problema linearnog programiranja. Odnosi se na činjenicu da se problemi linearnog programiranja javljaju u paru tj. da za svaki standardni problem LP-a definiranog za maksimum postoji korespondentni problem za minimum i obratno. Dakle, primarni problem (tzv. primal) simetričan je dualnom obliku [11]. Kada primarni problem sadrži velik broj ograničenja uz mali broj varijabla, konverzijom u dualni oblik problema moguće je znatno reducirati račun potreban za rješavanje problema [3].

### 3.2.2. SIMPLEKS METODA

Kako je spomenuto ranije u tekstu, Dantzig je 1947. razvio simpleks metodu kao jednu od najpoznatijih metoda za rješavanje problema linearnog programiranja [1]. Metoda je iterativna jer od nekog polaznog bazičnog rješenja nizom koraka tj. iteracija dolazimo do optimalnog rješenja ako kao takvo postoji [12]. Takav postupak rješavanja se obavlja preko simpleks tablica koje su prikazane i objašnjene u nastavku, a za još složenije probleme koriste se računala. Ideja simpleks metode je da postoji vrh izvedivog područja koji predstavlja optimalno rješenje za linearno programiranja [1].

Simpleksna metoda za rješavanje problema linearnog programiranja u standardnom obliku stvara niz mogućih točaka  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  koji vodi do konačnog rješenja jer se svakom iteracijom  $x^{(k)}$  dobiva nova ekstremna točka. Kreće se od nekog bazičnog rješenja. Ako je to rješenje ujedno i optimalno, postupak je gotov. Ako trenutno rješenje nije optimalno, traži se neko drugo rješenje koje je bolje. Prema tome će sa svakom iteracijom za problem minimuma funkcija cilja poprimiti manju vrijednost, a za problem maksimuma sve veću do postizanja optimalnog rješenja [12]. U prvoj fazi simpleks metode se nejednadžbe svode na jednadžbe uvođenjem dopunskih varijabli čime opći oblik prelazi u kanonski. Iako time raste broj nepoznanica, problem linearnog programiranja svodi se na kompaktniji zapis s kojim je lakše računati.

Prilikom primjene simpleks metode bitno je razlikovati bazične od nebazičnih varijabli. Bazične varijable  $B^{(k)}$  čini  $m$  nenegativnih komponenti vektora stupca  $x$ . Preostalih  $n-m$  komponenti tog vektora su nebazične varijable  $N^{(k)}$ . Nakon svake iteracije, simpleks metoda sustavno modificira te skupove kako bi pronašla alternativu koja nudi optimalno rješenje problema linearnog programiranja. U svakoj iteraciji varijable su izmjenjene tako da su bazične varijable u prvih  $m$  elemenata  $x$ -a. Prema tome, vrijedi da je  $x^T = (x_B^T, x_N^T)$ , gdje se  $x_B^T$  i  $x_N^T$  odnose na bazične i nebazične varijable.

Matrica u jednadžbi (3.11) može se modificirati prema istom principu u  $A = [A_B : A_N]$  gdje  $A_B$  predstavlja  $m \times m$  bazičnu matricu dok  $A_N$  predstavlja  $m \times (n-m)$  nebazičnu matricu. Zapis jednadžbe (3.11) tada prelazi u

$$[A_B : A_N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = A_B x_B + A_N x_N = b. \quad (3.13)$$

Uzimajući u obzir da je  $x_N^{(k)} = 0$ , može se pisati

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

gdje je  $\hat{b} = a_B^{-1}b$ . S obzirom da su bazične vrijednosti nenegativne vrijedi da je  $\hat{b} \geq 0$  [1].

Kada se za  $n-m$  zadanih nebazičnih varijabli uzme vrijednost nula i sustav  $Ax = b$  riješi po bazičnim varijablama prema ranije navedenim svojstvima, dobiva se tzv. bazično rješenje  $x$  [11].

Problem linearnog programiranja u kanonskom obliku s  $m$  linearnih ograničenja i  $n$  varijabli odlučivanja može imati bazično izvedivo rješenje za svaki izbor od  $n-m$  nebazičnih varijabli ili  $m$  bazičnih varijabli. Konačan broj izbora jednak je:

$$\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Čak i za manje vrijednosti  $n$  i  $m$ , broj izbora može biti jako velik čime problem postaje presložen za simpleksni algoritam te se rješava računalnim programima [1].

Koraci za rješavanje problema linearnog programiranja simpleks metodom objasniti će se na sljedećem primjeru.

Traži se maksimum funkcije cilja:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

uz ograničenja:

$$x_1 \leq 4,$$

$$2x_2 \leq 12,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18,$$

i uvjet nenegativnosti:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Prvi korak je prevođenje iz standardnog općeg oblika u kanonski oblik. Na već spomenuti način se uvode dopunske varijable  $x_3, x_4, x_5$  kako bi nejednadžbe poprimile oblik jednadžbi [12]. Dopunske varijable ne utječu na vrijednost funkcije cilja [11].

Kanonski oblik prikazan je sljedećim jednadžbama:

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0,$$

$$x_1 + x_3 = 4,$$

$$2x_2 + x_4 = 12,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Slijedi formiranje tablica pomoću kojih se simpleks metoda provodi. Retci tablice su redom funkcija cilja te dopunske varijable. U prvom stupcu pišu se redom funkcija cilja te sve ostale varijable od  $x_1$  do  $x_5$ . Sljedeći stupac čine vrijednosti s desne strane jednadžbi. Tablica se popunjava koeficijentima koji se pojavljuju uz varijable u jednadžbama u kanonskom obliku (prema Tablici 3.1).

**Tablica 3.1** Tablični prikaz koeficijenata za početnu iteraciju.

Bazične varijable	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Desna strana jednadžbe	Količnik
$z$	1	-3	-5	0	0	0	0	
$x_3$	0	1	0	1	0	0	4	
$x_4$	0	0	2	0	1	0	12	6
$x_5$	0	3	2	0	0	1	18	9

Na početku su bazične varijable  $x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 18$  dok su preostale varijable nebazične za koje vrijedi  $x_1 = x_2 = 0$ . Uvrštavanjem ovih vrijednosti u funkciju cilja dobiva se nula, no treba provjeriti optimalnost rješenja. Pošto se u funkciji cilja nalaze negativni koeficijenti, rješenje nije optimalno. Dakle, potrebno je naći novo bazično rješenje s većom vrijednosti funkcije cilja koje će odgovarati jednoj od susjednih ekstremnih točaka. U sljedećem koraku u bazično rješenje dodaje se jedna od varijabli  $x_1$  ili  $x_2$ , a izbacuje  $x_3, x_4$  ili  $x_5$ . Promatra se jedan stupac i jedan redak. Budući da se traži maksimum funkcije  $z$ , uzima se manje od rješenja  $x_1$  i  $x_2$ . Prema tome,  $x_2 = -5$  bit će nova bazična varijabla te se odabire njezin stupac (osjenčani stupac). Redak se odabire s obzirom na minimalni mogući količnik između vrijednosti desne strane i koeficijenata ranije odabranog stupca kao što je prikazano u zadnjem stupcu Tablice 3.1. Stoga se uzima redak uz  $x_4$  (osjenčani redak). Smisao presjeka retka i stupca je dobivanje tzv. *pivot* elementa (zaokruženo) koji je ključan za daljnje rješavanje uz pomoć Gauss-Jordanovih eliminacija [12]. Nova tablica (Tablica 3.2) dobiva se tako da se prvo na mjesto retka za  $x_4$  stavi redak za  $x_2$ . Potom je elementarnim transformacijama na pivotnoj poziciji potrebno dobiti 1. Da bi se to postiglo, cijeli redak za  $x_2$  dijeli se s 2. Nadalje, ostali elementi u prethodno osjenčanom stupcu trebaju postati 0. Redak za  $x_3$  se ne dira, već se samo prepisuje pošto je osjenčano polje jednako 0. U prvom retku potrebno je poništiti -5. To se radi tako da se treći redak iz Tablice 3.2 pomnoži s 5 i doda prvom retku iz Tablice 3.1. Analogno, da bi se dobila odgovarajuća nula u retku za  $x_5$ , treći redak iz Tablice 3.2 množi se s -3 i dodaje prvom retku iz Tablice 3.1. Na taj način se dobiva Tablica 3.2.

**Tablica 3.2** Tablični prikaz koeficijenata za 1. iteraciju.

Bazične varijable	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Desna strana jednadžbe	Količnik
z	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
$x_3$	0	1	0	1	0	0	4	4
$x_2$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
$x_5$	0	3	0	0	-1	1	6	2

Iz tabličnog se prikaza vidi da je vrijednost funkcije cilja nakon prve iteracije očekivano porasla. Pošto funkcija cilja i dalje sadrži negativan koeficijent (-3), dobiveno bazično rješenje  $x_3 = 4$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_5 = 6$  i  $x_1 = x_4 = 0$  nije optimalno te je potrebno provesti još jednu iteraciju prema istom principu. Sada se promatra stupac za  $x_1$ , a redak se opet određuje pomoću količnika. Najmanji količnik se dobije za  $x_5$  pa se njegov redak mijenja s retkom za  $x_1$ . Novi pivotni element je 3. Ponavljanjem prethodnog postupka dobiva se Tablica 3.3.

**Tablica 3.3** Tablični prikaz koeficijenata za 2. iteraciju.

Bazične varijable	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Desna strana jednadžbe
z	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
$x_3$	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
$x_2$	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
$x_1$	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Svi koeficijenti u funkciji cilja su nenegativni te je zadovoljen kriterij optimalnosti. Dobiveno konačno optimalno rješenje glasi:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = x_5 = 0$ . Uvrštavanjem rješenja u funkciju cilju, optimalna vrijednost iste iznosi  $z = 36$  [12].

### **3.2.3. NESIMPLEKS METODE**

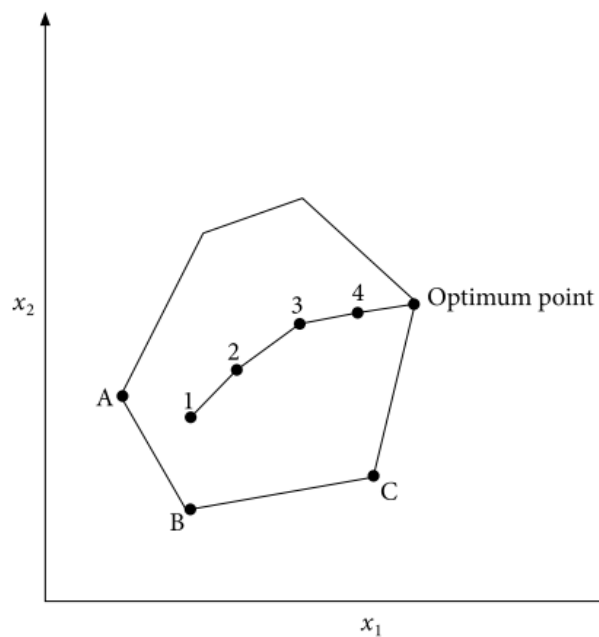
Iako se simpleks metoda intenzivno i učinkovito koristi u praksi za rješavanje problema linearnog programiranja, računsko vrijeme potrebno za dobivanje rješenja rapidno se povećava kako broj komponenti  $n$  raste. Takva eksponencijalna složenost čini glavni nedostatak simpleks algoritma. Svaki algoritam koji se koristi za rješavanje problema linearnog programiranja uz eksponencijalnu sadrži i polinomnu složenost. Polinomski algoritmi pronalaze rješenja u vremenskom intervalu koji je ograničen polinomom u broju varijabli. Ovim problemima polinomske složenosti bavili su se, između ostalih, L.G. Khachiyan i N.K. Karmarkar. Zaslužni su za definiranje određenih nesimpleksnih metoda koje se u nastavku ukratko opisuju.

#### **3.2.3.1. KHACHIYANOVA ELIPSOIDNA METODA**

Prvi polinomski vremenski algoritam za linearno programiranje razvio je 1979. ruski matematičar L. G. Khachiyan koji je pokazao da se linearni programi mogu riješiti i takvim algoritmom. Khachiyanov pristup proizlazi iz ideja analognih elipsoidnoj metodi koja se temelji na konveksnoj optimizaciji. Elipsoidna metoda je algoritam koji pronalazi optimalno rješenje problema linearnog programiranja u konačnom broju koraka. Metoda generira niz elipsoida čiji se volumen svakim korakom jednoliko smanjuje i na taj način obuhvaća minimum konveksne funkcije. Važnost Khachiyanove elipsoidne metode predstavlja mogućnost određivanja je li jednadžba izvediva ili nije unutar unaprijed određenog (polinomnog) broja iteracija [1]. Iako je algoritam u teoriji bolji od simpleks algoritma s obzirom na eksponencijalno vrijeme rada, u praksi je vrlo spor i ne može konkurirati simpleks metodi [13].

#### **3.2.3.2. KARMARKAROVA METODA UNUTARNJE TOČKE**

N. K. Karmarkar 1984. godine predložio je novi algoritam linearnog programiranja polinomske složenosti koji rješava složene probleme iz stvarnog života poput raspoređivanja, usmjeravanja i planiranja učinkovitije od simpleks metode. Karmarkarova metoda utjecala je na razvoj mnogih drugih nesimpleksnih tehnika koje se uobičajeno nazivaju metode unutarnjih točaka. Prema Slici 3.5, Karmarkarova metoda unutarnje točke prolazi kroz unutrašnje izvedivo područje 1-4 do postizanja optimuma dok bi se algoritam metode vanjskih točaka kretao u smjeru ABC do postizanja optimalnog rješenja.



**Slika 3.5** Metoda unutarnje točke [1].

Cilj metode je smanjiti broj iteracija kako bi se poboljšao računalni napor dok je glavni nedostatak identifikacija najboljeg izvedivog smjera za određeno rješenje. S obzirom na simpleks metodu, utvrđeno je da je za kompleksan problem Karmarkarova metoda 50 puta brža [1].



### 3.2.4. CJELOBRJNO LINEARNO PROGRAMIRANJE

Kod svih problema o kojima se do sada u radu raspravljalo, varijable odluke nisu morale biti cijeli brojevi. Takve varijable se javljaju kod optimizacije stope proizvodnje, brzine protoka reaktanta ili vremena potrebnog za rad određenog šaržnog procesa. Cjelobrojne varijable javljaju se prilikom određivanja broja radnika, broja serija po danu ili mjesecu i broja izmjenjivač topline u bilo kojoj mreži IT-a. Prema tome, rješenje od 3,5 radnika se ne može uzeti kao realno rješenje. Kod cjelobrojnog linearnog programiranja postavlja se ograničenje cjelobrojnosti na varijable prema čemu tako definiran problem dobiva ime problem cjelobrojnog programiranja.

Optimizacijski problem cjelobrojnog linearnog programiranja zapisuje se kao:

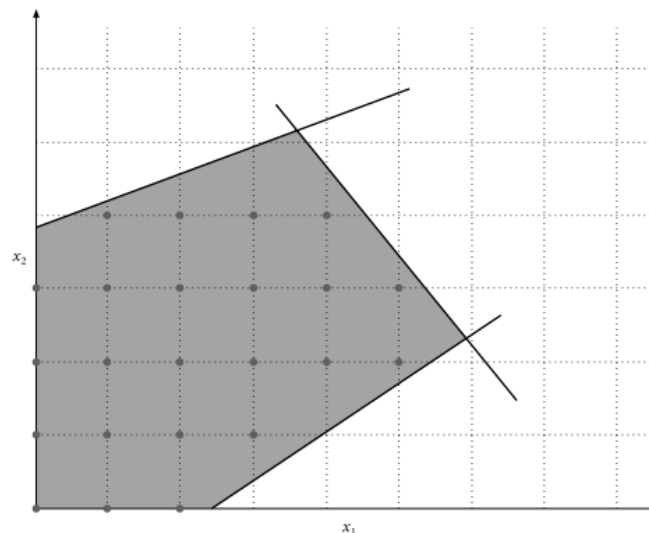
$$\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

uz uvjet 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

$$x \in Z_+^n$$

gdje  $Z_+^n$  označava skup vektora dimenzije  $n$  s cjelobrojnim nenegativnim komponentama.

Cjelobrojno linearno programiranje uobičajeno se dijeli u dvije grupe. Ukoliko su sve varijable ograničene na cjelobrojnu vrijednost govori se o čistom cjelobrojnom programiranju. Ako ograničenje vrijedi samo za određen broj varijabli, ali ne sve, govori se o miješanom cjelobrojnom programiranju. Osjenčano područje na Slici 3.6 predstavlja primjer izvedivog područja kada su varijable  $x_1$  i  $x_2$  realni brojevi, dok sive točke predstavljaju izvedive točke za cjelobrojno linearno programiranje.



Slika 3.6 Cjelobrojno linearno programiranje [1].

## 4. NUMERIČKI PRIMJERI

U ovom će se poglavlju riješiti dva numerička primjera iz područja linearnog programiranja. Za rješavanje je korišten programski paket MATLAB.

### 4.1. PRIMJER 1

Ovaj primjer se odnosi na cjelobrojno linearno programiranje.

Optimizacijski problem je izražen na sljedeći način:

$$\min x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4,$$

uz uvjet  $x_3$  i  $x_4$  su cijeli brojevi,

$$x_1 + 4x_2 \geq -5,$$

$$x_2 - x_4 \leq 5,$$

$$x_1 + 3x_3 - 10x_4 \leq 10,$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 2,$$

$$-20 \leq x \leq 20.$$

#### Rješenje:

Iz posljednjeg reda se vidi gornja i donja granica vektora  $x$ . Pošto uvjet govori da su vektori  $x_3$  i  $x_4$  cijeli brojevi, u MATLAB kodu dobivaju specifikaciju *intcon* kako bi poprimile cjelobrojne vrijednosti.

Funkcija cilja se prema (3.13) može zapisati u matričnom obliku kao:

$$\min_x [1 \ 5 \ 6 \ -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

iz čega se vidi da je

$$f = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Na isti se način definiraju matrice za nejednadžbe ograničenja, uz napomenu da je prvu nejednadžbu potrebno pomnožiti s -1 kako bi imala isti znak nejednakosti. Nejednadžbe ograničenja poprimaju sljedeći matrični oblik

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -10 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Problem je moguće optimizirati u MATLAB-u pomoću funkcije *intlinprog* koja pronalazi minimum problema mješovitog cjelobrojnog linearnog programiranja. Ova funkcija optimizira vrijednost funkcije cilja  $f$  u točkama rješenja  $x$  s obzirom na ulazne vrijednosti koje čine vektori  $f, b, b_{eq}, l_b$  i  $u_b$ , matrice  $A$  i  $A_{eq}$  te uz cjelobrojni vektori koji su izraženi funkcijom *intcon* [14].

Koristi se sljedeći kod:

```
1 f=[1; 5; 6; -2];
2 intcon=[3;4];
3 b=[5;5;10;2];
4 A=[-1 -4 0 0; 0 1 0 -1; 1 0 3 -10; 1 2 -3 4];
5 Aeq=[];
6 beq=[];
7 lb=-20*ones(4,1);
8 ub=20*ones(4,1);
9 [x,fval]=intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
10 x, fval
```

LP: Optimal objective value is -47.000000.

```
x =
    -7.0000
     0.5000
    -8.0000
    -4.0000
```

fval = -44.5000.

Dakle, optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi -47. U točkama rješenja  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_3 = -8$  i  $x_4 = -4$  funkcija cilja iznosi -44.5 [1].

## 4.2. PRIMJER 2

Potrebno je optimizirati sljedeću funkciju cilja uz navedena ograničenja:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10,$$

$$x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$x_1 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

### Rješenje:

Potrebno je funkciju cilja  $Z$  prevesti u formu za računanje minimuma pa se zapis modificira. Dobiva se:

$$\min f = -3x_1 - 2x_2.$$

Problem je moguće optimizirati u MATLAB-u pomoću funkcije *linprog* koja pronalazi minimum problema linearnog programiranja. Za ulazne vrijednosti  $f$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $A_{eq}$ ,  $b_{eq}$  i  $l_b$ , funkcija *linprog* daje optimiziranu vrijednost funkcije cilja  $f$  u točki rješenja  $x$ .

Koristi se sljedeći kod:

```
1 f=[-3;-2;];
2 A=[2 1;1 1;1 0];
3 b=[10;8;4];
4 Aeq=[];
5 beq=[];
6 lb=zeros(2,1);
7 [x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);
8 x,fval
```

```
x =      2
      6
```

```
fval =    -18.
```

Dakle, minimum funkcije cilja postiže se za  $x_1 = 2$  i  $x_2 = 6$  te iznosi -18 [1].

## 5. ZAKLJUČAK

U ovome radu vidjeli smo da je optimizacija u području kemijskog inženjerstva vrlo bitna. Primjenjuje se u transportu, proizvodnji, dizajnu pogona, prehrani i sl. kako bi se resursi iskoristili na učinkovit način. Optimizacijom se postiže maksimalni moguć profit i minimalni trošak. Da bi to bilo moguće, potrebno je definirati i formulirati problem s obzirom na varijable i parametre koji na njega utječu kako bi optimizacija bila što efikasnija. Imali smo priliku vidjeti kako to izgleda na jednostavnim primjerima prilikom strujanja fluida i provođenja topline, no u stvarnosti radi se o vrlo složenim procesima koji zahtijevaju računalno rješavanje različitim softverskim programima. S obzirom na široku primjenu optimizacije, razvijene su mnogobrojne metode za rješavanje iste ovisno o specifikaciji problema. Varijable procesa se uglavnom ne biraju proizvoljno, već su strogo definirane upravo iz razloga postizanja što veće učinkovitosti. Metoda linearnog programiranja jedan je od jednostavnijih, a opet vrlo učinkovitih metoda za rješavanje uvjetne optimizacije. Najviše se primjenjuje simpleks metoda koja dolazi do optimalnog rješenja za svaki problem linearnog programiranja. Moguće je i grafičko rješavanje, ali je ograničeno na maksimalno dvije varijable. S porastom varijabli raste i složenost problema pa je u takvim slučajevima bolje i lakše koristiti računalni program.

Kako su resursi sve više ograničeni, a pokušava se iskoristiti što više uz što manji trošak i veći profit, optimizacija problema će se u budućnosti sigurno provoditi kako metodama linearnog programiranja, tako i drugim metodama koje će osigurati što efikasniji proces.

## 6. LITERATURA

- [1] Dutta, S. (2016.) *Optimization in Chemical Engineering*, Cambridge University Press.
- [2] [https://sites.math.washington.edu/~burke/crs/515/notes/nt\\_1.pdf](https://sites.math.washington.edu/~burke/crs/515/notes/nt_1.pdf) [pristup: 2. kolovoza 2022.]
- [3] Edgar, T. F., Himmelblau, D. M., Lasdon, L. S. (2001.) *Optimization of Chemical Processes*, New York: McGraw-Hill.
- [4] Wankhede, S., Salunke, P. J., Gore, N. G. (2015.) *Optimization of water storage tank*, International Journal of Engineering and Technical Research, sv. 3 (4): 189-192.
- [5] Westerlund, T., Pettersson, F., Grossmann, I. E., (1994.) *Optimization of pump configurations as a MINLP problem*, Computers chem. Engng, sv. 18 (9): 845-858.
- [6] Cheng, X. T., Wang, W. H., Liang, X. G. (2012.), *Optimization of heat transfer and heat-work conversion based on generalized heat transfer law*, Sci China Tech, sv. 10 (10): 2847-2855.
- [7] <https://www.nuclear-power.com/nuclear-engineering/heat-transfer/thermal-conduction/critical-thickness-of-insulation-critical-radius/> [pristup: 10. kolovoza 2022.]
- [8] Chen, J., Cui, G., Cao, M., Kayange, H., Li, J. (2021.) *Heat Exchanger Network Optimization Based on the Participatory Evolution Strategy for Streams*, Energies, 14, 8392.
- [9] <https://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-13.pdf> [pristup: 10. rujna 2022.]
- [10] Petkovićek, D. (2007.) *Linearno programiranje*, predavanja <http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicsek%20-%20Linearno%20programiranje.pdf> [pristup: 10. rujna 2022]
- [11] Mašek, M. (2018.) *Posebna svojstva simpleks algoritma*, prvostupnički rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb. <https://zir.nsk.hr/islandora/object/foi:3965/preview> [pristup: 11. rujna 2022.]
- [12] <https://sites.google.com/site/linearnoprogramiranje1/teorija-linearnog-programiranja/metode-rjesavanja-lp/simpleks-metoda> [pristup 11.9.2022.]
- [13] Arora, S. (2005.) *The Ellipsoid Algorithm for Linear Programming*, Princeton University <https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall05/cos521/ellipsoid.pdf> [pristup: 12. rujna 2022.]
- [14] <https://aleksandarhaber.com/solve-mixed-integer-linear-programming-milp-optimization-problems-in-matlab/> [pristup: 12. rujna 2022.]