

Gustoća pakiranja polidisperznih čestica

Kapusta, Antonio

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Chemical Engineering and Technology / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:149:178930>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Chemical Engineering and Technology University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
SVEUČILIŠNI DIPLOMSKI STUDIJ

Antonio Kapusta

GUSTOĆA PAKIRANJA POLIDISPERZNIH ČESTICA

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Juraj Šipušić

Članovi ispitnog povjerenstva: Prof. dr. sc. Juraj Šipušić

Prof. dr. sc. Jelena Macan

dr. sc. Andrej Vidak

Zagreb, srpanj 2021.

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. TEORIJSKI DIO.....	2
2.1. Nasipna gustoća cementa u rastresitom i zbijenom stanju	2
2.2. Titranje.....	3
2.3. Matematičko njihalo	3
2.4. Fizičko njihalo.....	4
2.5. Prigušeno titranje	6
2.6. Stabilnost ravnoteže i kretanja fizičkog njihala.....	7
2.7. Moment inercije homogenog valjka	8
2.7.1. Metoda 1: određivanje momenta inercije fizičkog njihala	10
2.7.2. Metoda 2: određivanje gustoće pakiranja polidisperznih čestica	12
3. EKSPERIMENTALNI DIO.....	14
3.1. Kalibracija aparature	17
3.2. Validacija Metode 2	17
4. REZULTATI	18
4.1. Kalibracija aparature	18
4.2. Validacija Metode 2	27
5. RASPRAVA	31
5.1. Kalibracija aparature	31
5.2. Validacija Metode 2	35
6. ZAKLJUČAK.....	36
7. LITERATURA	38
8. POPIS SIMBOLA	39
9. PRILOZI	40

SAŽETAK

Pretpostavljeno je da kružna frekvencija titranja fizičkog njihala (posude za praškasti uzorak) ovisi o gustoći pakiranja ispitivanih polidisperznih čestica. U ovome radu sastavljena je aparatura za praćenje titranja fizičkog njihala. Aparatura omogućuje određivanje elongacije prigušenog titranja posude (sa ili bez uzorka), iz koje se određuje kružna frekvencija titranja. Izvedba aparature omogućuje mjerenje titranja oko više paralelnih osi titranja međusobno udaljenih za poznati razmak od 0.025 m. Maksimalno je smanjen utjecaj trenja između osi titranja i fizičkog njihala (posude s uzorkom), ali je mjerenje i dalje osjetljivo na vanjske smetnje poput vibracija poda i fluktuacija u strujanju zraka. Upravo ti problemi otvaraju mogućnost unaprjeđenja postojeće aparature.

Udaljenost određene osi rotacije od težišta prazne posude, odnosno moment inercije prazne posude kroz os rotacije koja prolazi njenim težištem određeni su mjerenjem titranja prazne posude oko više paralelnih osi rotacije koje su međusobno udaljene za poznati razmak od 0.025 m. Dobiveni rezultati pokazuju rasipanje pa su izraženi kao srednja vrijednost svih mjerenja. Određena je udaljenost najudaljenije osi titranja od težišta posude od 0.10925 m i moment inercije prazne posude oko osi rotacije koja prolazi kroz njeno težište koji iznosi $4.35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

Eksperimentalna ovisnost kružne frekvencije o masi uzorka se kvalitativno slaže s matematičkim modelom, ali ne i kvantitativno. Za bolje slaganje je potrebno modificirati aparaturu i/ili unaprijediti matematički model.

Ključne riječi: gustoća polidisperznih čestica, moment inercije, titranje

ABSTRACT

For the purpose of this thesis, it was assumed that the angular frequency of a real oscillator (a container for granular particles) depends on the density of packing of the measured polydisperse particles. In this thesis, an apparatus for the monitoring of real oscillators was made. This apparatus enables measurement of the elongation of damped oscillation of the container (with or without the sample) from which the angular frequency is determined. The apparatus was constructed in such a manner that it allows measurement of damped oscillation about multiple parallel axes which are mutually spaced for a predetermined gap of 0.025 m. The influence of friction (between the container and the rotation axes) was maximally reduced, yet the measurements were still highly sensitive to disturbances from the surrounding like vibrations and fluctuations in the air's movement. These problems open up possibilities for further enhancements of the apparatus.

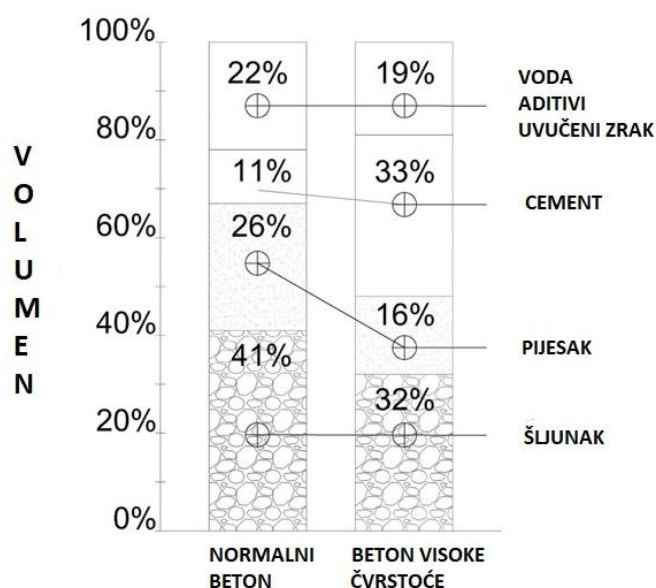
The distance between a specific rotation axis and the container's central diameter and the container's central diameter moment of inertia were determined through the measurement of the container's oscillation about several parallel axes which are spaced for 0.025 m. The results were dissipated, therefore they were interpreted as the mean value. The distance between the furthest rotation axis and the container's central diameter is 0.10925 m and the container's central diameter moment of inertia is $4.35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

A constructed curve depicting experimentally gained data qualitatively matches the curve that was constructed from the mathematical model, but not quantitatively. Apparatus and mathematical model improvements are needed for further experiments.

Key words: density of polydisperse particles, moment of inertia, oscillation

1. UVOD

Svakodnevno se susrećemo s polidisperznim sustavima (čestica) iako toga nismo ni svjesni. Jedna od intenzivnijih primjena polidisperznih sustava čestica je u graditeljstvu jer čine sastavni dio granulometrijskog sastava (šljunka, pijeska i cementa) za pripremu betona i osnovnih slojeva nasipnog materijala kao podloge cesta/prometnica te glavninu volumena i mase asfaltnih mješavina. Cement (cement opće namjene, tj. Portland cement) i bitumen su veziva čija je uloga povezati diskretne čestice u koherentni kompozit. Veziva imaju visoku cijenu, a velika primjena veziva negativno utječe na okoliš zbog znatnih ispuštanja CO₂ u atmosferu (posebice proizvodnja cementa). Jedan od mogućih načina uštede količine uporabljenog veziva (za pripremu 1 m³ kompozita) je dobro poznavanje svojstava sustava polidisperznih čestica radi mogućnosti stvaranja smjesa željene/manje poroznosti (slika 1) čime se smanjuje potrošnja veziva za pripremu potrebne količine kompozita željenih svojstva.



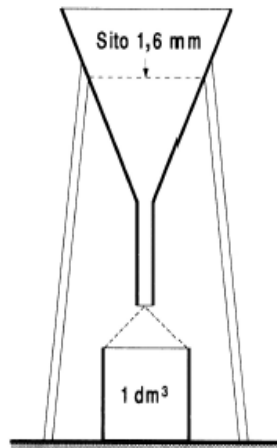
Slika 1. Volumni udio šljunka, pijeska, cementa, vode i uvučenog zraka u betonu uobičajenog sastava u betonu visoke čvrstoće.

Osnovni cilj ovoga rada je razvoj jednostavnog postupka brzog određivanja nasipne gustoće uzorka polidisperznih čestica. Stoga je izvedena aparatura koja se sastoji od valjkaste posude (nosača polidisperznih čestica) koja titra oko osi promjenjive udaljenosti od težišta fizičkog sustava. Izveden je i odgovarajući model prigušenog fizičkog njihala, a titranje sustava praćeno je pomoću optičkog senzora, osciloskopa i prijenosnog računala.

2. TEORIJSKI DIO

2.1. Nasipna gustoća cementa u rastresitom i zbijenom stanju

Gustoća cementa u rastresitom stanju ispituje se na način da se uzorka cementa sipa, kroz lijevak s mrežom, u valjkastu posudu volumena $V = 1 \text{ dm}^3$, poznate mase m , koja je centrično postavljena ispod lijevka kao što je prikazano na *Slici 1*. Cement se sipa sve dok se na posudi ne formira stožac s bazom koja je jednaka gornjoj bazi posude nakon čega se stožac poravna metalnim ravnalom, čim se površina cementa u posudi izravna te se izmjeri masa pune posude m_1 . Masa cementa je razlika masa pune i prazne posude. Punjenje posude odvija se bez potresa.



Slika 1. Aparatura za određivanje gustoće cementa.

Gustoća cementa u zbijenom stanju određuje se u istoj aparaturi, kao i u rastresitom stanju, uz bitnu razliku da se uzorak zbija tako da posuda pada 120 puta u minuti sa visine od 1 cm, odnosno sve do trenutka kada se cement u posudi više ne sliježe.[1]

2.2. Titranje

Titranje je posebna vrsta periodičnog gibanja pri kojemu se materijalna točka giba oko ravnotežnog položaja. Vremenski interval unutar kojega se ponavlja cijelo gibanje naziva se period titranja. U trajanju jednog perioda titranja, T , tijelo prođe kroz ravnotežni položaj dva puta te nakon njega jednakom brzinom dolazi u isti položaj, tj. u istu fazu titranja.

Faza titranja je trenutno stanje određenog titranja, tj. ona predstavlja položaj i brzinu tijela u određenom vremenskom trenutku. Prema tome, period se može definirati kao vremenski interval između dvije uzastopne jednake faze titranja.

Uzrok svakom titranju je određena sila koja nastoji neuravnotežen sustav vratiti u položaj ravnoteže. Najjednostavnije titranje je ono pri kojemu je sila, koja vraća sustav u ravnotežni položaj, proporcionalna iznosu pomaka iz položaja ravnoteže, a suprotna njegovom smjeru. Takva vrsta titranja zove se jednostavno harmoničko titranje, a sustav koji titra zbog utjecaja harmoničke sile naziva se harmonički oscilator.[2]

2.3. Matematičko njihalo

Matematičkim njihalom zovemo materijalnu točku mase m koja se njiše obješena na nerastezljivu nit duljine l (čija je masa zanemariva). Kada njihalo miruje u ravnotežnom položaju, napetost niti N uravnotežuje silu težu G koja djeluje na materijalnu točku. Pomicanjem njihala izvan ravnotežnog položaja za neki kut ϑ , normalnu komponentu sile teže uravnotežuje napetost niti,

$$N = mg \cos \vartheta , \quad (1)$$

a tangencijalna komponenta sile teže je usmjerena prema ravnotežnom položaju te je ona jednaka zbroju svih sila na materijalnu točku:

$$F_t = - mg \sin \vartheta \quad (2)$$

gdje predznak minus označava smjer djelovanja sile suprotno od smjera povećanja kuta ϑ .

Sila koja djeluje na materijalnu točku nije proporcionalna pomaku ϑ , već $\sin \vartheta$, što znači da ni sila ni gibanje njihala nije harmoničko. Za male vrijednosti kuta ϑ izraženog u radijanima vrijedi $\sin \vartheta \approx \vartheta$ pa je u tom slučaju sila:

$$F = -mg\vartheta \quad (3)$$

a shodno tome, i gibanje njihala harmoničko. Gibanje matematičkog njihala pod tim uvjetima je analogno gibanju harmoničkog oscilatora, dok njihanje za veće amplitude, tj. veće vrijednosti kuta ϑ nije harmoničko.[1]

Kružna frekvencija titranja matematičkog njihala je:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4)$$

Period titranja matematičkog njihala je:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

Moment inercije, I / kgm^2 , za materijalnu točku je [2]:

$$I = ml^2 \quad (6)$$

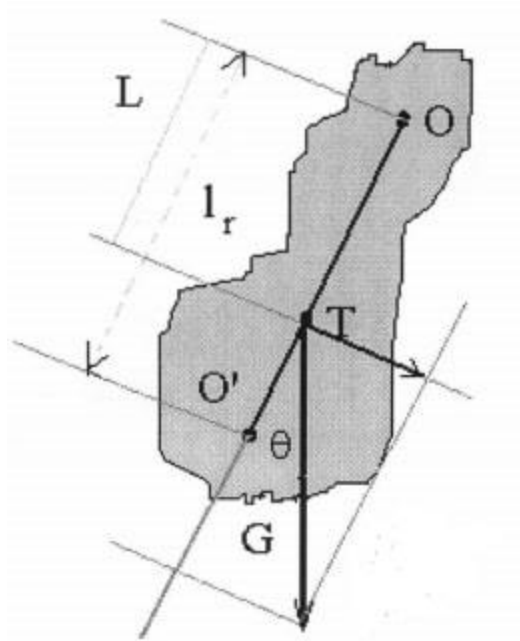
2.4. Fizičko njihalo

Za razliku od matematičkog njihala, fizičko njihalo nije materijalna točka, već kruto tijelo koje se, zbog utjecaja sile teže, njiše oko horizontalne osi koja ne prolazi kroz njegovo težište.

Moment sile teže koji uzrokuje titranje je:

$$M = -mgL \sin \vartheta \quad (7)$$

gdje je L udaljenost osi rotacije O od težišta T tijela, a ϑ je kut koji spojnica OT zatvara s vertikalom. Predznak minus pokazuje prvu sličnost s matematičkim njihalom, a to je da moment sile nastoji smanjiti kut ϑ .



Slika 2. Shematski prikaz fizičkog njihala.

Druga sličnost je ta da za male amplitude vrijedi $\sin \vartheta \approx \vartheta$ čime prethodna jednačba poprima oblik:

$$M = -mgL \vartheta \quad (8)$$

Jednačba gibanja fizičkog njihala, tj. jednačba rotacije krutog tijela oko nepomične osi za male amplitude glasi:

$$M = I\alpha = -mgL \vartheta \quad (9)$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgL}{I} \vartheta = 0 \quad (10)$$

gdje je I moment inercije tijela s obzirom na os rotacije. Os ne smije prolaziti kroz težište tijela, zato što se onda tijelo nalazi u indiferentnoj ravnoteži u svakom položaju te ono ne titra.

Uz poznat moment tromosti i masu tijela, mjerenjem udaljenosti između težišta i objesišta, bez pokusa je moguće odrediti period titranja tijela/fizičkog njihala, tj. frekvenciju njihanja. Kod nepravilnih tijela kod kojih se ne zna izračunati moment tromosti, on se određuje eksperimentalno mjerenjem perioda ili frekvencije titranja. Potrebno je napomenuti da jedno te isto tijelo ima različite momente inercije s obzirom na različite osi titranja. Time se dobije eksperimentalna metoda za mjerenje momenta tromosti tijela oko osi koja ne prolazi kroz

težište [3]. Jednadžba određivanja momenta inercije tijela oko paralelne osi na udaljenosti d od težišta t glasi [2]:

$$I_d = I_t + md^2 \quad (11)$$

Moment tromosti (ne samo pravilnih homogenih) tijela može se izračunati pomoću *Steinerovog poučka* (jednadžba (11)).

Rješenje jednadžbe (10) može se pisati u obliku harmoničke funkcije s obzirom da je to jednadžba harmoničkog titranja jer su amplitude dovoljno male:

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (12)$$

gdje je ϑ_0 amplituda titranja, φ_0 početna faza, a ω je kružna frekvencija titranja:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad (13)$$

Period fizičkog titranja u slučaju malih amplituda je [2]:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad (14)$$

2.5. Prigušeno titranje

Provodi li se bilo kakvo mjerenje koje uključuje titrajuću masu ovješenu na oprugu ili na njihalu neke druge vrste, može se primijetiti da će s vremenom frekvencija titranja postajati sve veća što se amplituda smanjuje. U konačnici tijelo se vrati u početni ravnotežni položaj, odnosno titranje prestaje. Smanjenje amplitude je pokazatelj gubitka energije iz sustava (jer ukupna energija sustava ovisi o amplitudi), a uzroci disipacije energije u okolinu mogu biti: otpor medija u kojemu tijelo titra, trenje koje se pojavljuje u samom sustavu (npr. na objesištu) ili dodatne složene oscilacije dijelova sustava koji nisu savršeno kruti. Kod malih tijela može se pretpostaviti da sila otpora ovisi linearno o brzini v i da ima smjer suprotan smjeru gibanja:

$$F_0 = -bv \quad (15)$$

gdje je b neka konstanta karakteristična za oblik i ostala svojstva tijela.

Jednadžba drugog Newtonovog zakona, uzevši u obzir i silu otpora, poprima oblik

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + ks = 0 \quad (16)$$

Uvođenjem novih konstanti $2\gamma = \frac{b}{m}$, gdje γ karakterizira jakost sile otpora sredstva i vlastite

kružne frekvencije titranja, ω_0 (bez trenja), $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, slijedi:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\gamma \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad (17)$$

Rješenje jednadžbe prigušenog titranja (17) je ovisnost amplitude o vremenu:

$$s = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (18)$$

Kružna frekvencija ω razlikuje se od frekvencije ω_0 i nešto je manja:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (19)$$

a razlika je to veća što je sila otpora veća. Iako je ta razlika najčešće zanemariva, to nije slučaj kod amplitude jer je tamo razlika primjetna. Amplituda prigušenog oscilatora,

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \quad , \quad (20)$$

se eksponencijalno smanjuje s vremenom, što znači masa i dalje titra, samo što joj je amplituda pri svakom sljedećem titranju sve manja. Vrijeme koje je potrebno da nove amplitude utrnu ovisi o konstanti γ , tj. o omjeru jakosti sile otpora i mase.

U konačnici možemo primijetiti da se jednadžba prigušenog titranja razlikuje od jednadžbe gibanja harmoničkog oscilatora koja glasi [3]:

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (21)$$

2.6. Stabilnost ravnoteže i kretanja fizičkog njihala

Stabilnost ravnoteže tijela s obzirom na os rotacije dijelimo na: stabilnu, labilnu i indiferentnu. Stabilan položaj ravnoteže tijela nastupa kada se os rotacija nalazi vertikalno iznad težišta. Pomicanjem tijela izvan položaja ravnoteže za kut ϑ , tijelo počinje oscilirati oko ravnotežnog položaja određenom kružnom frekvencijom. Ako su vrijednosti početne kružne frekvencije ili kuta ϑ male, maksimalna kružna frekvencija i amplituda će također biti malih vrijednosti pri čemu postoji izrazita tendencija vraćanja tijela u početni ravnotežni položaj.

Labilan položaj ravnoteže tijela nastupa kada se os rotacije nalazi vertikalno ispod težišta. Pomicanjem tijela izvan položaja ravnoteže za mali kut ϑ , tijelo će se početi gibati u istom smjeru prolazeći uvijek kroz ravnotežni položaj s određenom kružnom frekvencijom pri čemu je ona monotono rastuća funkcija vremena. Promjena kuta je u granicama $\vartheta \in [\vartheta_0, 2\pi - \vartheta_0]$. Ako se tijelu da mala kutna količina gibanja, ono će se neprekidno kretati u istom smjeru i tako prolazeći kroz ravnotežni položaj pri čemu će kut biti monotono rastuća funkcija vremena. Tijelu u labilnom položaju ravnoteže je potrebna mala promjena kuta ili mala kutna količina gibanja da bi se izazvalo veliko kretanje. Tijelo izvan labilnog položaja ravnoteže ima tendenciju udaljavanja od ravnotežnog položaja te se ne može vratiti u početno stanje.

Indiferentan položaj ravnoteže tijela nastupa kada os rotacije prolazi kroz težište. Ako se tijelo zaokrene iz položaja ravnoteže, ta radnja neće izazvati nikakvo kretanje tijela, već će ono zadržati novi položaj. Dovodjenjem neke kutne količine gibanja, tijelo se jednoliko rotira određenom kružnom frekvencijom. Tijelo pomaknuto za određeni kut ne teži približavanju niti udaljavanju od ravnotežnog položaja, prema tome ono se ponaša indiferentno u odnosu na položaj ravnoteže [4].

2.7. Moment inercije homogenog valjka

Izraz za moment inercije čvrstog *homogenog* valjka oko osi aksijalne osi koja prolazi kroz težište valjka glasi:

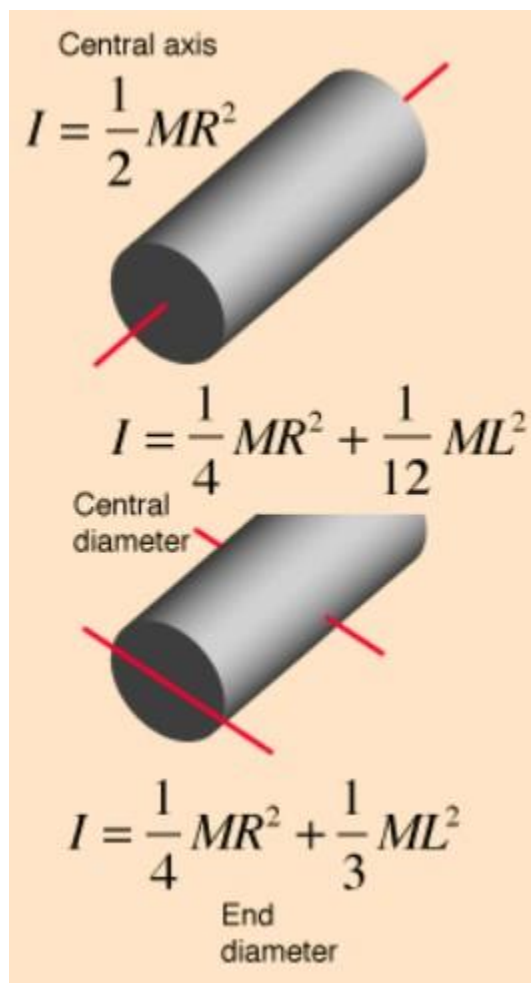
$$I_t = \frac{1}{2}mr^2 \quad (22)$$

gdje je m masa valjka, a r njegov radijus, a prikazana je na *Slici 3*.

U slučaju da os rotacije prolazi kroz težište valjka (okomito na aksijalnu os valjka), izraz za moment inercije glasi

$$I_t = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2 \quad (23)$$

gdje je h visina tijela (valjka).



Slika 3. Moment inercije homogenog valjka kroz različite osi rotacije. [5]

Moment inercije čvrstog valjka koji titra oko osi okomite na aksijalnu os valjka i koja prolazi njegovom bazom glasi [5]:

$$I_t = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{3} mh^2 \quad (24)$$

Ovaj je izraz moguće dobiti iz izraza (23) uz primjenu Steinerovog poučka, jednadžba (11).

2.7.1. Metoda 1: određivanje momenta inercije fizičkog njihala

Ova metoda primjenjivat će se za određivanje položaja težišta fizičkog njihala, tj. udaljenosti osi rotacije od težišta fizičkog njihala te njegovog momenta inercije oko paralelne osi rotacije koja prolazi kroz njegovo težište. Ova metoda temelji se na mjerenju kružne frekvencije titranja fizičkog njihala oko *dvije paralelne osi* rotacije udaljene jedna od druge za točno poznatu vrijednost koju ćemo ovdje označavati s k .

Jednadžba za kružnu frekvenciju uzorka (ili posude bez uzorka) može se napisati u obliku kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ na sljedeći način:

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I_{\text{težišta}} + mL^2} \quad (25)$$

$$\omega^2 I_{\text{težišta}} + \omega^2 mL^2 - mgL = 0 \quad (26)$$

$$\omega^2 mL^2 - mgL + \omega^2 I_{\text{težišta}} = 0 \quad (27)$$

te se iz prethodne jednadžbe lako može doći do izraza za moment inercije tijela oko osi rotacije koja prolazi kroz njegovo težište:

$$I_{\text{težišta}} = \frac{mgL}{\omega^2} - mL^2. \quad (28)$$

Ovaj izraz (jednadžba (28)), vrijedi za bilo koju udaljenost paralelnih osi titranja od težišta, te je moguće napisati za dvije paralelne osi titranja:

$$\frac{mgL_1}{\omega_1^2} - mL_1^2 = I_{\text{težišta}} = \frac{mgL_2}{\omega_2^2} - mL_2^2 \quad (29)$$

Jednadžba (29) može napisati u obliku

$$mL_2^2 - mL_1^2 + \frac{mgL_1}{\omega_1^2} - \frac{mgL_2}{\omega_2^2} = 0 \quad (30)$$

Uzevši u obzir da udaljenost između te dvije paralelne osi rotacije poznata (izmjerena) i pretpostavivši da je prva os udaljenija od težišta tijela od druge osi, dobivamo izraz:

$$L_2 = L_1 - k \quad (31)$$

Uvrštavanjem ove jednakosti u jednadžbu (30) dobivamo:

$$m(L_1 - k)^2 - mL_1^2 + \frac{mgL_1}{\omega_1^2} - \frac{mg(L_1 - k)}{\omega_2^2} = 0 \quad (32)$$

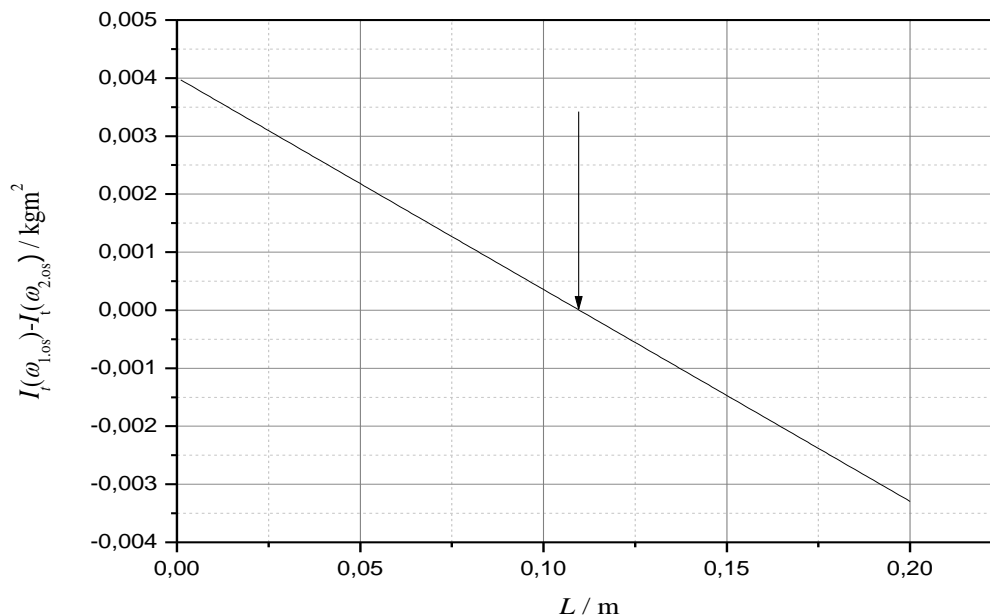
$$mL_1^2 - 2mL_1k + mk^2 - mL_1^2 + \frac{mgL_1}{\omega_1^2} - \frac{mgL_1}{\omega_2^2} + \frac{mgk}{\omega_2^2} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{mgL_1}{\omega_1^2} - 2mL_1k - \frac{mgL_1}{\omega_2^2} + mk^2 + \frac{mgk}{\omega_2^2} = 0 \quad (34)$$

prethodnu jednadžbu podijelimo s masom m i izvučemo konačan izraz za računanje udaljenosti prve osi titranja od težišta tijela:

$$L_1 = \frac{k^2 + \frac{gk}{\omega_2^2}}{2k - g\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)} \quad (35)$$

Do rješenje ove jednadžbe (odnosno udaljenosti težišta fizičkog njihala od osi titranja) moguće je doći i grafičkim putem na način da se izračuna moment inercije tijela oko osi rotacije koja prolazi kroz njegovo težište, preko jednadžbe (28). Koristeći izmjerene vrijednosti kružne frekvencije titranja, ω_1 i ω_2 , prikaže se ovisnost razlike izračunatih vrijednosti momenta inercije kroz težište za osi 1 i 2 u ovisnosti o L (slika 4). Točka u kojoj pravac siječe apscisu je prava vrijednost L . Ovaj je postupak prikazan na sljedećoj slici.



Slika 4. Grafički postupak određivanja udaljenosti osi titranja od težišta tijela. Masa fizičkog njihala je $m=0,37082$ kg, $\omega_1^2 = 81,0$ s⁻², $\omega_2^2 = 100,0$ s⁻², ubrzanje sile teže je $g=9,80662$ ms⁻².

2.7.2. Metoda 2: određivanje gustoće pakiranja polidisperznih čestica

Primjenom ove metode moguće je za poznatu (izmjerenu) vrijednost polumjera i mase valjkastog uzorka te momenta inercije prazne posude procijeniti prosječnu gustoću ekvivalentnog homogenog valjka koji ima ista svojstva kao i ispitivani uzorak. U slučaju nepoznate vrijednosti momenta inercije prazne posude, ovom metodom je moguće i njega procijeniti. Ova metoda zasniva se na mjerenju kružne frekvencije titranja fizičkog njihala oko jedne odabrane osi rotacije.

Izraz za kružnu frekvenciju titranja prazne posude glasi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{m_p g L_p}{I_p}} \quad (3630)$$

gdje I_p predstavlja moment inercije posude u kojoj se nalazi uzorak.

U daljnjem je radu pogodnije koristiti izraz za ω^2 , odnosno u sljedećem obliku:

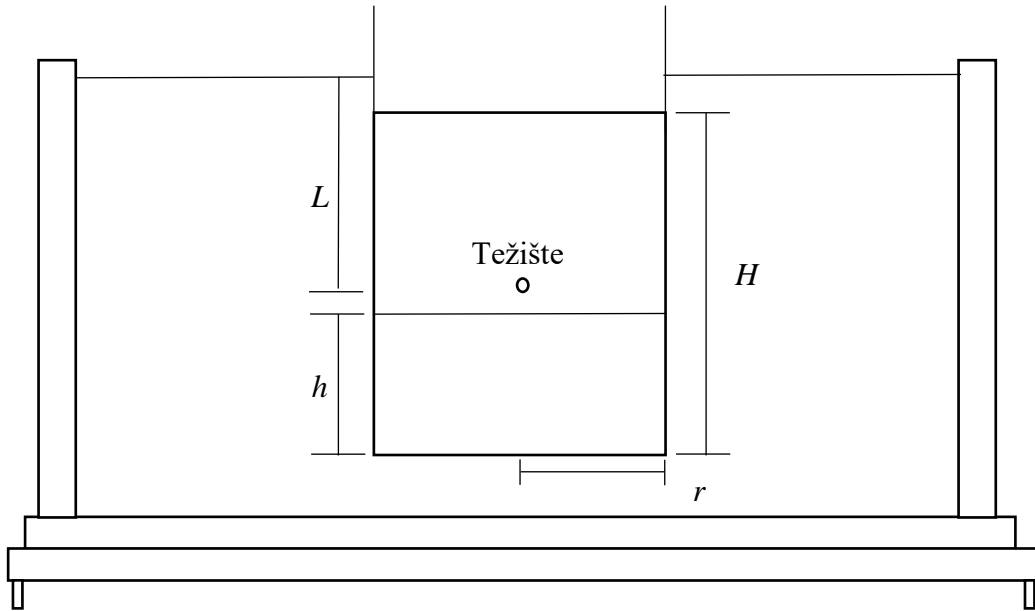
$$\omega^2 = \frac{m_p g L_p}{I_p} \quad (37)$$

Napunimo li posudu nekim uzorkom kao što su polidisperzne čestice, tada cjelokupni sustav titra kao jedna cjelina. Uzevši u obzir aditivnost utjecaja posude i uzorka, koji se nalaze u njoj, jednadžba koja opisuje cjelokupno titranje ovog složenog sustava oko vodoravne osi titranja glasi:

$$\omega^2 = \frac{m_p g L_p + m_{uz} g L_{uz}}{I_p + I_{uz}} \quad (38)$$

$$\omega^2 = \frac{m_p g L_p + m_{uz} g (H - \frac{h}{2})}{I_p + I_{uz}} \quad (39)$$

gdje je H udaljenost osi rotacije od dna posude, a $H - \frac{h}{2}$ je udaljenost težišta uzorka do osi titranja. Detalji su prikazani na sljedećoj slici.



Slika 5. Shematski prikaz fizičkog njihala, uz izvod vlastite kružne frekvencije nosača uzorka i valjkastog uzorka.

Visina uzorka h se može iskazati kao

$$m = \rho V = \rho r^2 \pi h \quad (40)$$

$$h = \frac{m}{\rho r^2 \pi} \quad (41)$$

te uvrštavanjem u jednačbu (41) dobije se izraz

$$\omega^2 = \frac{m_p g L_p + m_{uz} g \left(H - \frac{1}{2} \frac{m_{uz}}{\rho r^2 \pi} \right)}{I_p + I_{uz}} \quad (42)$$

Steinerovim poučkom i uz jednačbu (23) poprima svoj konačan oblik:

$$\omega^2 = \frac{m_p g L_p + m_{uz} g \left(H - \frac{1}{2} \frac{m_{uz}}{\rho r^2 \pi} \right)}{I_p + m_p L_p^2 + m_{uz} \left[\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{m_{uz}}{\rho r^2 \pi} \right)^2 + \left(H - \frac{1}{2} \frac{m_{uz}}{\rho r^2 \pi} \right)^2 \right]} \quad (43)$$

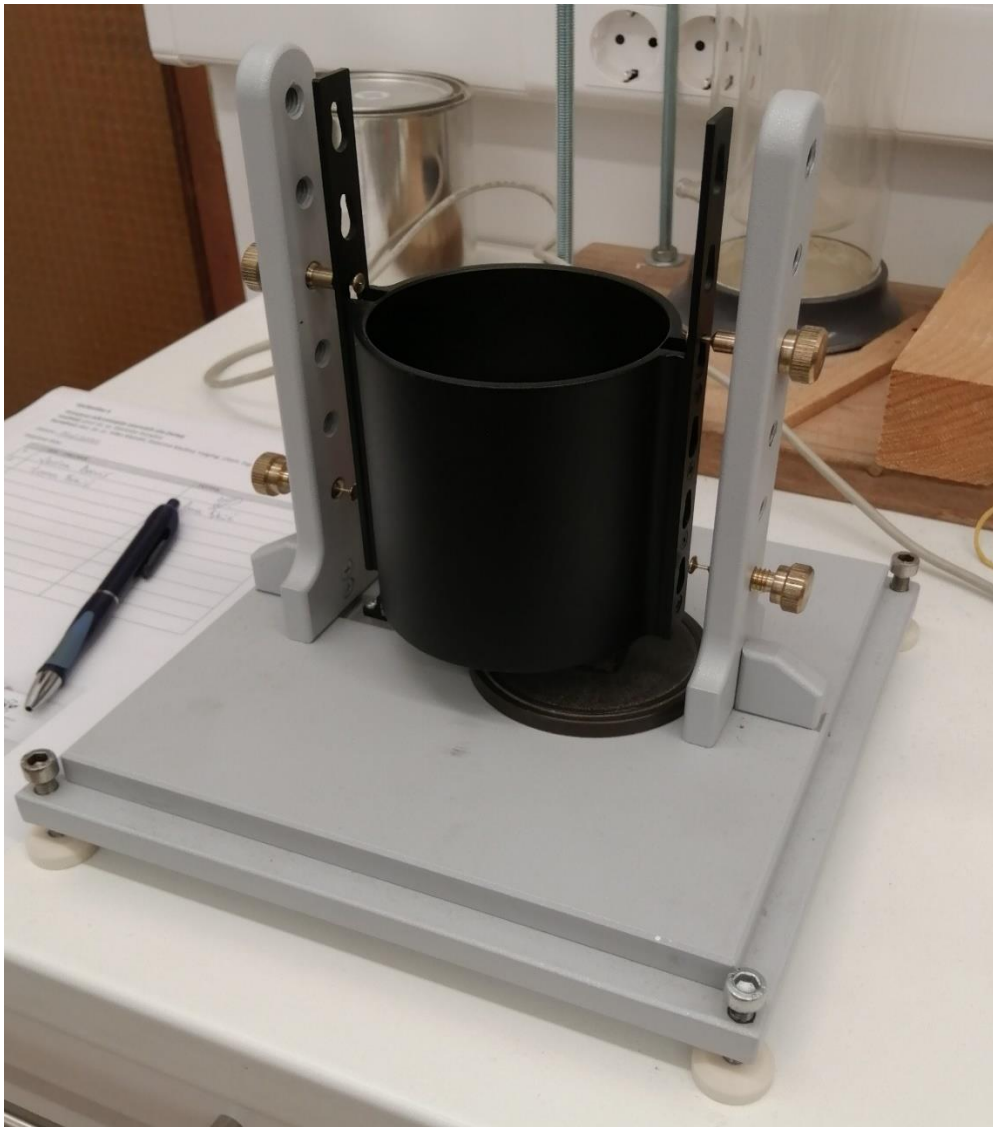
Jednačba (43) može imati drugačiji oblik ako imamo uzorak kojemu je poznata visina i udaljenost njegovog težišta od osi rotacije:

$$\omega^2 = \frac{m_p g L_p + m_{uz} g \left(H - \frac{h}{2} \right)}{I_p + m_p L_p^2 + m_{uz} \left[\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{12} h^2 + \left(H - \frac{h}{2} \right)^2 \right]} \quad (44)$$

3. EKSPERIMENTALNI DIO

Za potrebe provođenja eksperimentalnog dijela ovoga rada, dizajnirana je i konstruirana aparatura kojom je moguće precizno pratiti titranje fizičkog njihala. Središnji dio aparature sastoji se od aluminijske posude poznate unutarnje geometrije s definiranim relativnim položajima između mogućih osi titranja te transmisijski optički senzor *TCST 2103* (detalji se nalaze u *Prilogu*). Posuda je pričvršćena za postolje aparature s dva mjedena vijka koji ujedno definiraju os rotacije. Na donjem kraju posude nalazi se tanka metalna igla koja prilikom titranja posude prolazi između odašiljača infracrvenog zračenja i detektora (fototranzistor). Senzor ima filter koji blokira utjecaj dnevne svjetlost. Prolaz metalne igle uzrokuje zaklanjanje odašiljanog zračenja, a mjerni signal je napon $U(t)$ (mjeren osciloskopom *Handyscope HS3 (TiePie engineering, Nizozemska)*). Senzor je napajan baterijama radi izbjegavanja pojave šuma izazvanog gradskom mrežom. Postolje aparature ima mogućnost korekcije nagiba radi kompenziranja nesavršenosti aparature i nagiba površine na kojoj se nalazi. Titranje svih mjerenja je bilo ciljano prigušeno magnetom pozicioniranim ispod posude.

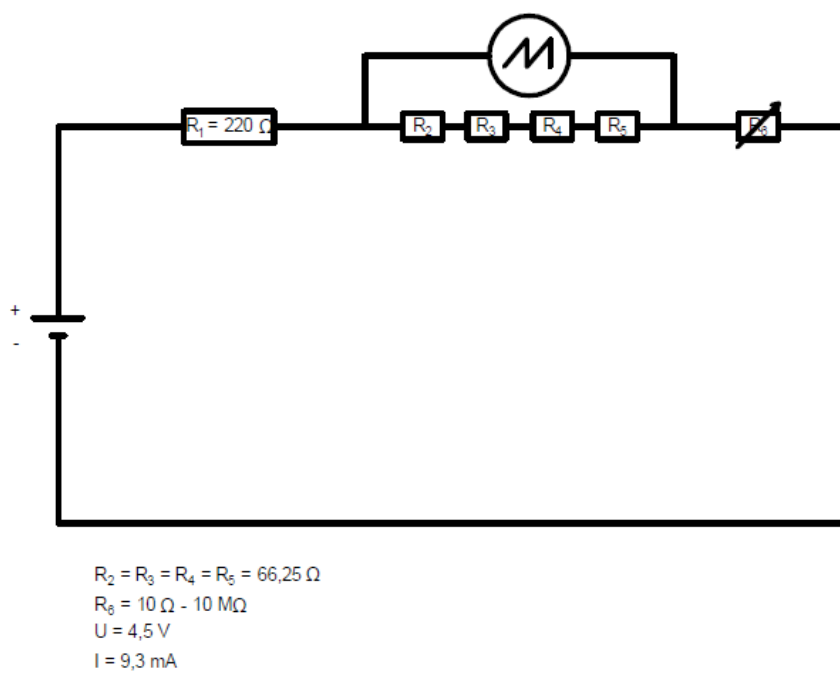
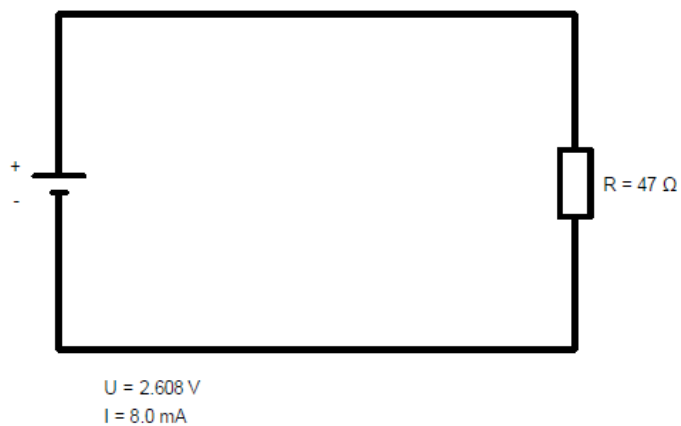
Aparatura je prikazana na *Slici 6. i u Prilogu*.



Slika 6. Fotografija aparature.

Bitni podaci posude, tj. fizičkog njihala, su njegova masa koja iznosi $m=0,37082$ kg, unutarnji promjer $d=2r=0,080$ m te razmak između osi rotacije $k=0,025$ m. Vrijednost ubrzanja sile teže koja je uzeta za proračune odnosi se na njenu vrijednost u Maksimiru i iznosi $g=9,80662$ m/s² [6].

Odašiljač i detektor senzora imaju zasebne strujne krugove i zasebna napajanja prikazana na *Slici 7*.



Slika 7. Strujni krug odašiljača infracrvenog elektromagnetskog zračenja (gore) i fototranzistorskog detektora (dolje) senzora

Ekperimentalni dio ovoga rada podijeljen je na dva dijela: kalibracija aparature i validacija *Metode 2*.

3.1. Kalibracija aparature

Proces kalibracije aparature proveden je korištenjem *Metode 1*. Snimljeno je prigušeno titranje posude oko četiri različite paralelne osi s ciljem određivanja momenta inercije posude te određivanja položaja njenog težišta. Snimljene krivulje (ovisnost napona o vremenu, $U(t)$) su utočnjene modelom prigušenog harmoničkog titranja (jednadžba (18)). Na taj su način određeni/dobiveni parametri pojedinih krivulja od kojih je onaj najvažniji kružna frekvencija titranja. Primjenom *Metode 1*, uz poznavanje eksperimentalno određenog perioda titranja, odnosno kružne frekvencije titranja prazne posude, određen je (grafički i računski) položaj težišta prazne posude (za različite kombinacije osi rotacije) iz čega je također određen moment inercije prazne posude oko osi rotacije koja prolazi kroz njezino težište korištenjem jednadžbe (28).

Proces kalibracije aparature *Metodom 1* ujedno služi kao validacija metode jer je očekivano da će metoda, prilikom provedbe izračuna za sve kombinacije podataka kružnih frekvencija (ovisno o odabiru osi titranja), dati jednoznačnu informaciju o udaljenosti pojedine (odabrane) osi titranja od težišta.

3.2. Validacija Metode 2

Metoda 2 je validirana konstruiranjem grafičke ovisnosti kružne frekvencije, mjerene oko treće osi rotacije, o masi uzorka poznatih svojstva (aluminijska slitina koja se nalazi u posudi) te utočnjavanjem dobivene krivulje s modelom jednadžbe (43). Potrebni parametri koji opisuju geometriju posude su određeni tijekom ranijeg eksperimentalnog dijela ovoga rada, a parametri koji opisuju uzorak su navedeni od strane proizvođača, odnosno izmjereni:

$$\rho(\text{AlCuMgSi1}) = 2790 \text{ kg/m}^3$$

$$2r(\text{AlCuMgSi1}) = 0,06020 \text{ m}$$

4. REZULTATI

Prikaz grafičkih i tabličnih podataka podijeljeni su u iste sekcije kao i opisi provođenja eksperimenta.

Izračun kružne frekvencije titranja fizičkog njihala proveden je u programskom paketu *OriginPro 8.5*, a mjerni podaci su utočnjeni modelom kojega opisuje funkcija oblika:

$$y = P + A_0 e^{-\gamma x} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (45)$$

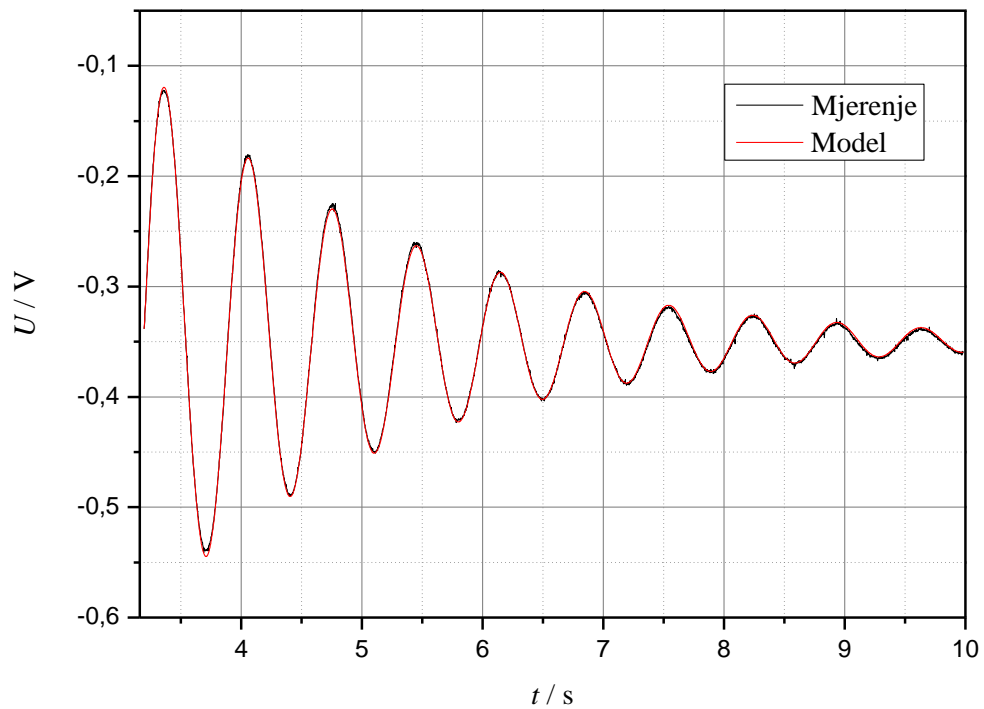
gdje parametar P predstavlja *offset*, tj. napon u stanju mirovanja odnosno najnižoj točki titranja. Ovaj je parametar dodan zato jer brojčane vrijednosti mjerenog napona iznose od 0,000 V pa sve do oko -0,800 V. Zapravo je ovaj opseg napona moguće promijeniti promjenom napona napajanja i promjenom otpora serijski spojenog sa senzorom (fototranzistorom) koji mijenja otpor ovisno o količini upadnog infracrvenog zračenja. Naravno, i sam je predznak napona je moguće promijeniti zamjenom mjernih spojišta. Pažljivim namještanjem aparature u vodoravan položaj, napon senzora se nalazi na sredini mjernog raspona, tj. oko -0,400 V. U neposrednoj blizini ravnotežnog položaja, tj. za male amplitude titranja odziv senzora je linearan, tj. proporcionalan je elongaciji titranja.

4.1. Kalibracija aparature

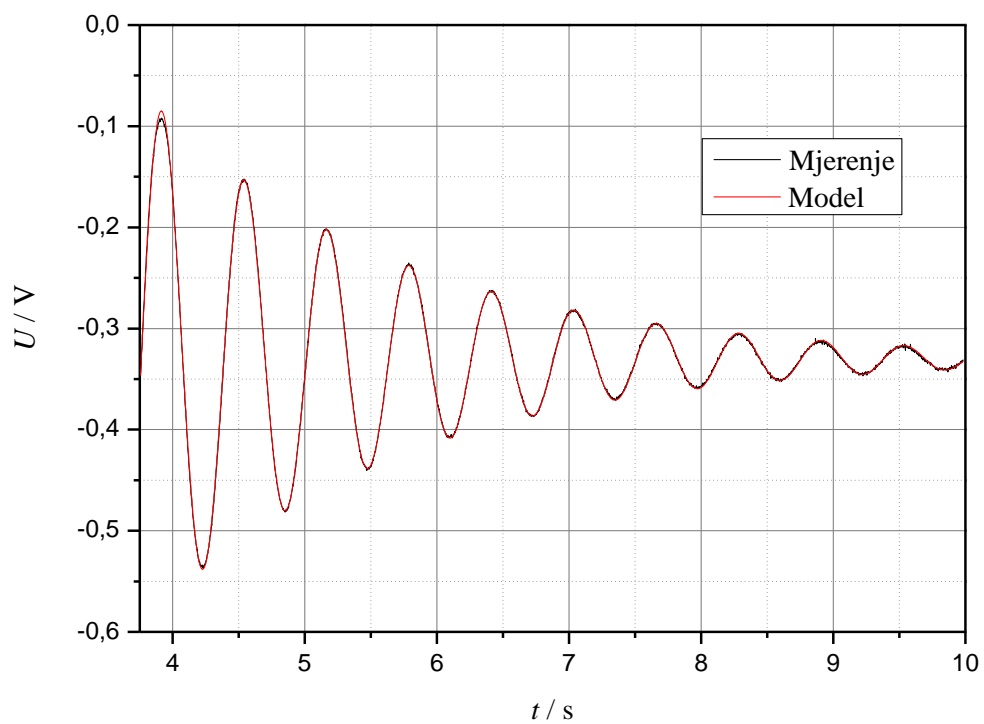
Mjerenja su provedena na četiri osi rotacije označene na način da prva os predstavlja onu najudaljeniju od dna posude, a od druge do četvrte je svaka bliža dnu posude za 0,025 m.



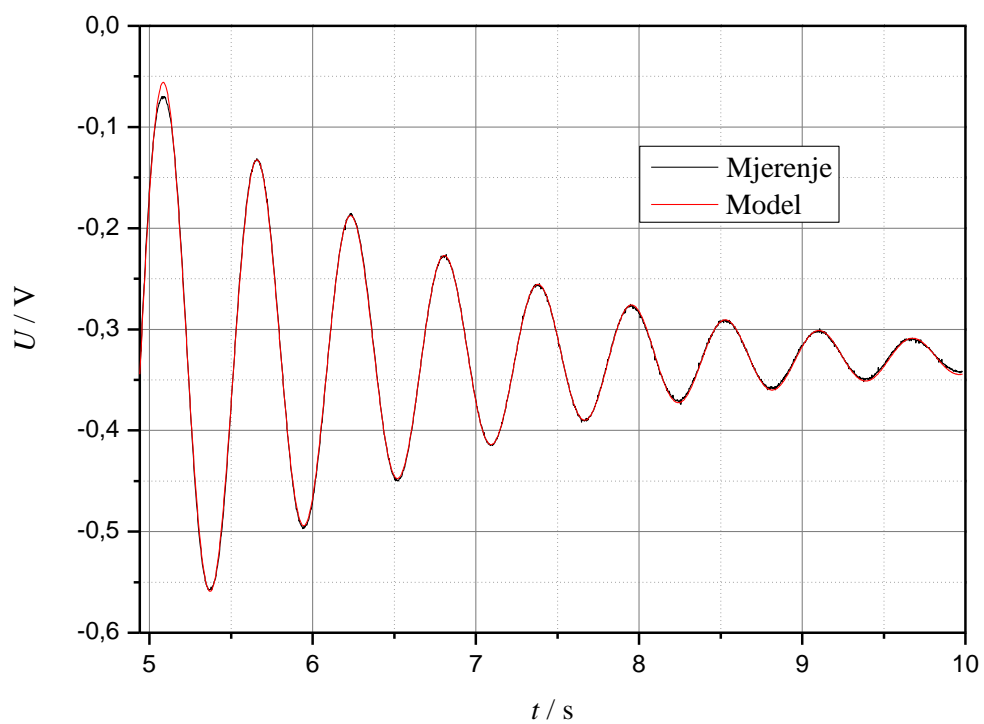
Slika 8. Prikaz osi titranja u izvedenoj aparaturi. Trenutno je nosač uzorka (s aluminijskom slitinom koja nije bila korištena kao uzorak u ovome nizu mjerenja) ovješén oko treće osi, brojeći od vrha.



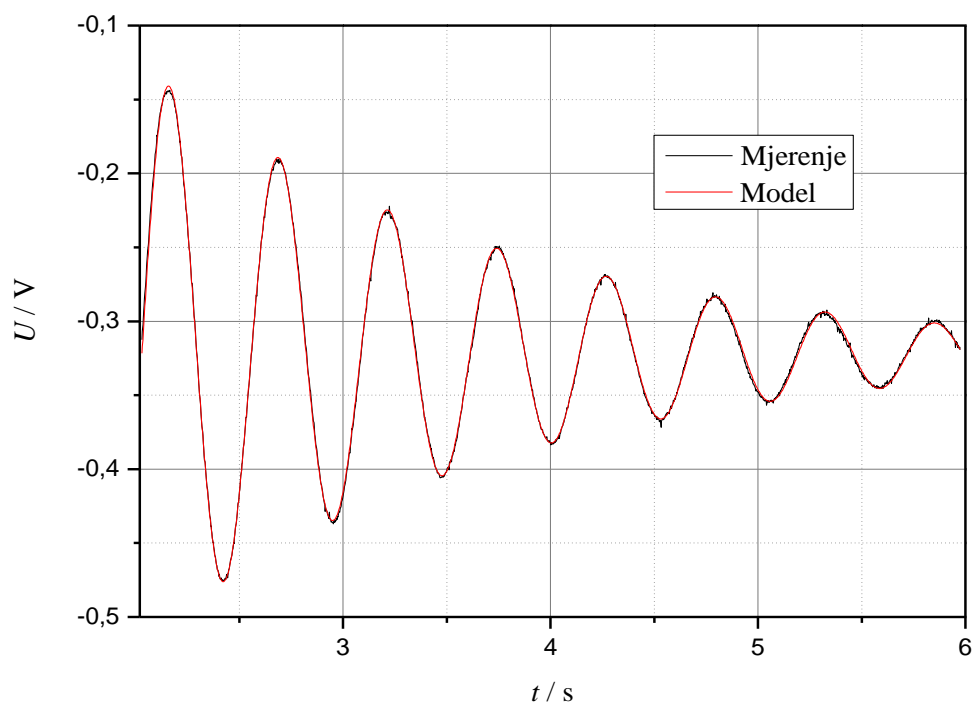
Slika 9. Utočnjavanje mjernih podataka titranja posude oko prve osi rotacije.



Slika 10. Utočnjavanje mjernih podataka titranja posude oko druge osi rotacije.



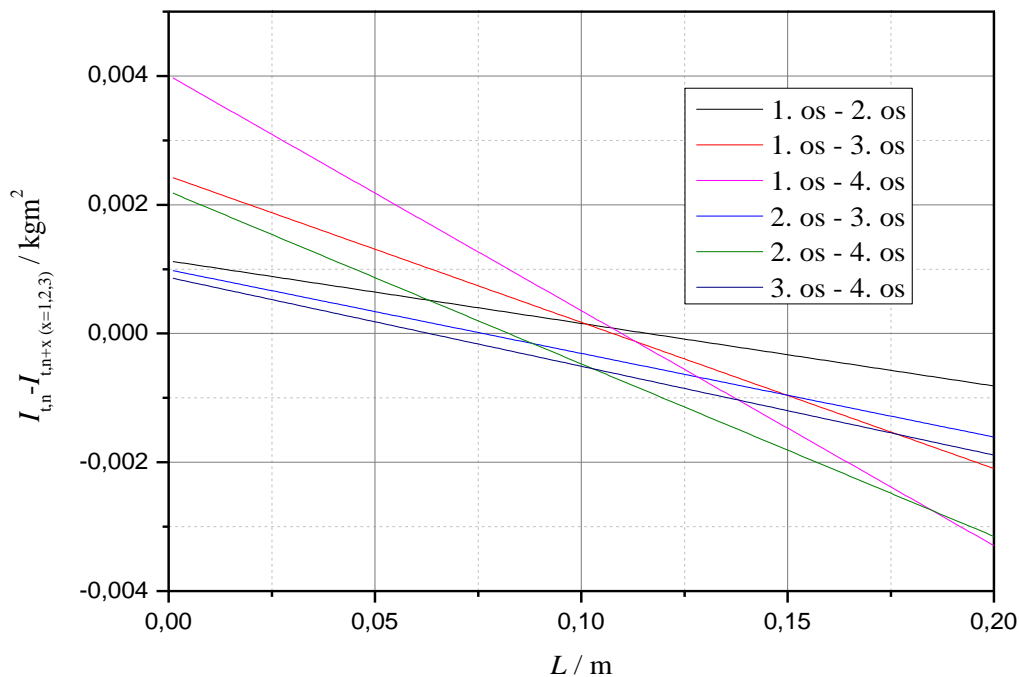
Slika 11. Utočnjavanje mjernih podataka titranja posude oko treće osi rotacije.



Slika 12. Utočnjavanje mjernih podataka titranja posude oko četvrte osi titranja.

Tablica 1. Prikaz dobivenih vrijednosti kružne frekvencije titranja prazne posude oko četiri različite osi rotacije (brojene od vrha) utočnjavanjem jednadžbom (45) te pripadajućih vrijednosti R^2 .

Os titranja	Prva	Druga	Treća	Četvrta
ω / s^{-1}	9,01671	10,06356	10,94521	11,91494
R^2	0,99919	0,99959	0,99926	0,99906



Slika 13. Prikaz pravaca koji predstavljaju razliku momenta inercije prazne posude oko osi rotacije koja prolazi kroz njeno težište za različite kombinacije vrijednosti kružnih frekvencija titranja koje su određene na različitim udaljenostima osi rotacije od težišta posude.

Iz *Slike 13.* je vidljivo da je položaj prve osi titranja (brojeći od vrha) određen na temelju mjerenja kružne frekvencije titranja osi 1 i 2, 1 i 3 te 1 i 4. Položaj druge osi titranja (brojeći od vrha) određen na temelju mjerenja kružne frekvencije titranja osi 2 i 3 te 2 i 4, dok je položaj treće osi titranja od težišta prazne posude za uzorak određen primjenom Metode 1 (*Stranica 30.*) prema jednadžbi (35), na temelju mjerenja kružne frekvencije titranja oko osi 3 i 4.

Tablica 2. Prikaz grafički određenih vrijednosti L (udaljenost osi titranja od težišta) korištenjem *Metode 1*, za sve moguće kombinacije eksperimentalno određenih kružnih frekvencija titranja oko četiri osi rotacije te prikaz prosječne vrijednosti L , apsolutne i relativne pogreške pojedinih mjerenja relativno sa srednjom vrijednosti, standardna devijacija određenih vrijednosti L te relativno standardno odstupanje.

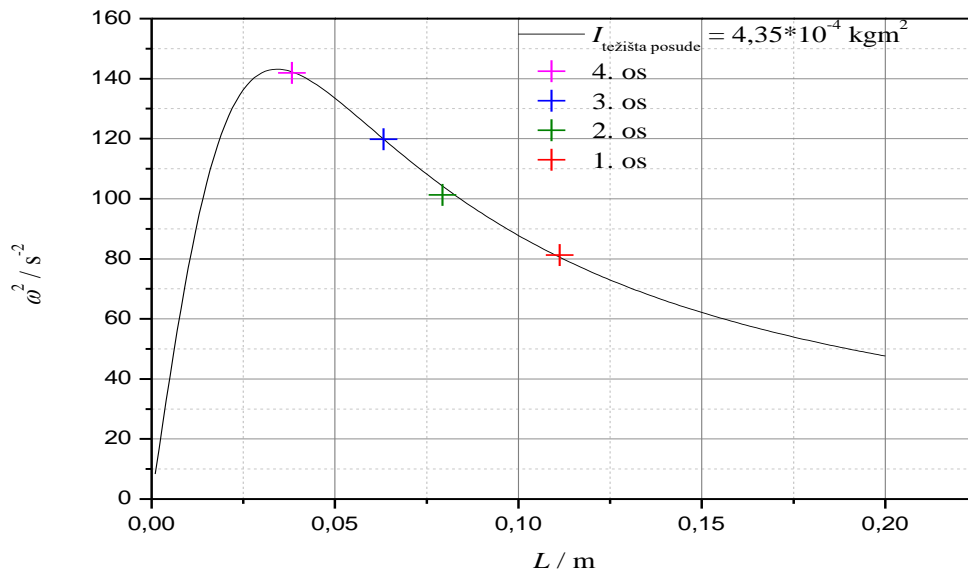
Kombinacija osi rotacije	1.-2.	1.-3.	1.-4.	2.-3.	2.-4.	3.-4.
L / mm	116,21	107,16	109,23	101,26	107,41	113,71
L_{prosjeck} / mm	109,17					
Apsolutna pogreška / mm	7,04	2,00	0,07	7,89	1,75	4,54
Relativna pogreška / %	6,45	1,83	0,06	7,23	1,61	4,16
Standardna devijacija / mm	5,29					
Relativno standardno odstupanje / %	4,84					

Tablica 3. Prikaz računski određenih vrijednosti L korištenjem *Metode 1*, tj. udaljenosti osi rotacije od težišta prazne posude za sve moguće kombinacije eksperimentalno određenih kružnih frekvencija titranja oko četiri osi rotacije te prikaz prosječne vrijednosti L , apsolutne i relativne pogreške pojedinih mjerenja relativno sa srednjom vrijednosti, standardna devijacija određenih vrijednosti L te relativno standardno odstupanje.

Kombinacija osi rotacije	1.-2.	1.-3.	1.-4.	2.-3.	2.-4.	3.-4.
L / mm	116,21	107,66	109,75	101,27	107,41	113,20
L_{prosjeak} / mm	109,25					
Apsolutna pogreška / mm	6,96	1,59	0,504	7,98	1,84	3,95
Relativna pogreška / %	6,37	1,45	0,46	7,30	1,68	3,61
Standardna devijacija / mm	0,52					
Relativno standardno odstupanje / %	4,74					

Tablica 4. Prikaz vrijednosti momenta inercije prazne posude oko osi rotacije koja prolazi kroz njeno težište, I_t , za sve moguće kombinacije eksperimentalno određenih kružnih frekvencija titranja oko četiri osi rotacije te prikaz prosječnog I_t , apsolutne i relativne pogreške pojedinih mjerenja relativno sa srednjom vrijednosti, standardna devijacija određenih vrijednosti I_t te relativno standardno odstupanje.

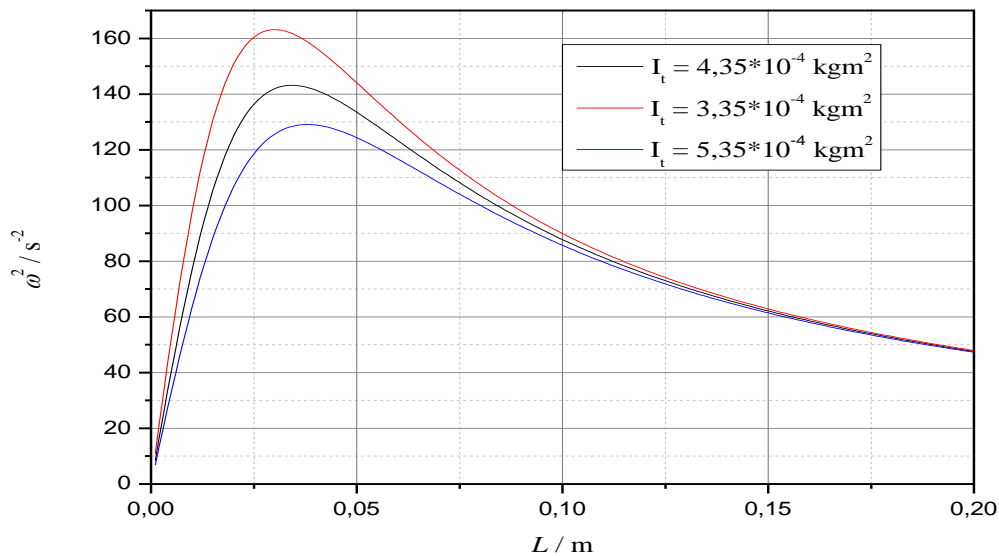
Kombinacija osi rotacija	1.-2.	1.-3.	1.-4.	2.-3.	2.-4.	3.-4.
$I_t * 10^{-4} / \text{kgm}^2$	1,90	5,17	4,42	5,82	4,41	4,37
$I_{t, \text{ prosjek }} * 10^{-4} / \text{kgm}^2$	$4,35 * 10^{-4}$					
<i>Apsolutna pogreška</i> <i>/ kgm²</i>	2,47	8,25	7,40	1,47	5,72	2,45
<i>Relativna pogreška / %</i>	56,56	18,96	1,70	33,71	1,32	0,56
<i>Standardna devijacija</i> <i>/ kgm²</i>	$1,33 * 10^{-4}$					
<i>Relativno standardno odstupanje / %</i>	30,55					



Slika 14. Prikaz izmjerenih vrijednosti kvadrata kružne frekvencije titranja prazne posude u ovisnosti o udaljenosti težišta od osi titranja. Prikazane su pojedine osi rotacije i model ovisnosti $\omega^2(L_{\text{težišta}})$ za srednju vrijednost momenta inercije prazne posude oko osi rotacije koje prolazi kroz njeno težište $I_{\text{težišta posude}} = 4,35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$. Model je prikazan korištenjem jednadžbe (25).

Na *Slici 14.* prikazano je slaganje eksperimentalno određenog kvadrata kružne frekvencije titranja prazne posude u ovisnosti o eksperimentalno određenoj udaljenosti osi titranja od težišta prazne posude. Na *Slici 14.* je također prikazan i model ovisnosti ω^2 o L prema jednadžbi (25):

$$\omega^2 = \frac{mgL}{I_{\text{težišta}} + mL^2} \quad (31)$$

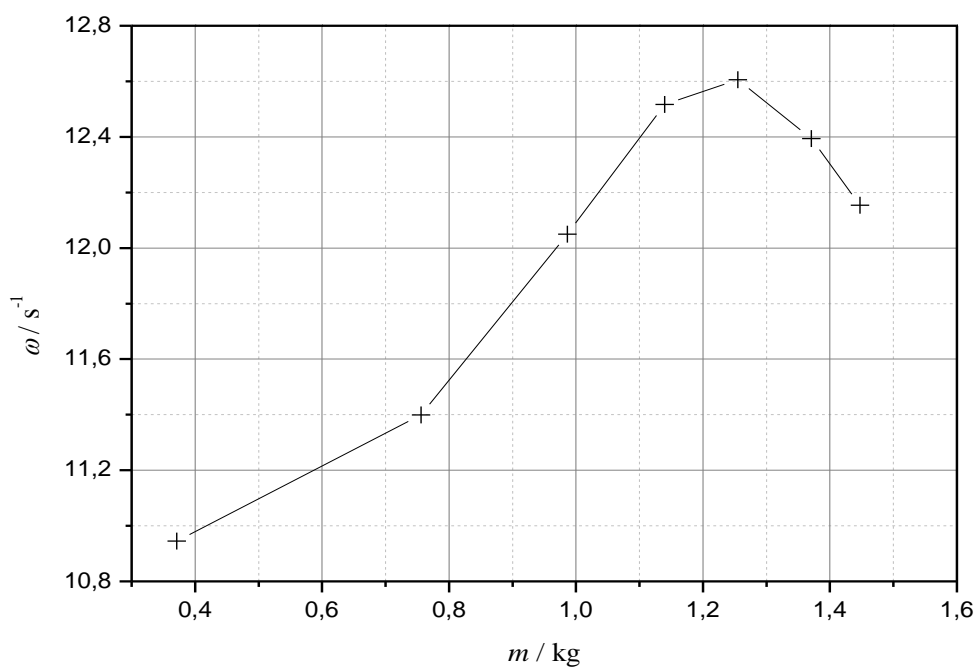


Slika 15. Prikaz utjecaja različitih vrijednosti momenta inercije prazne posude oko osi rotacije koja prolazi kroz njeno težište na krivulju ovisnosti kvadrata kružne frekvencije o udaljenosti težišta prazne posude od osi rotacije. Model je prikazan korištenjem jednadžbe (25).

Na *Slici 15.* je prikazana promjena kvadrata kružne frekvencije titranja o momentu inercije fizičkog njihala, odnosno rezultat simulacije (jednadžba (25) – model fizičkog njihala) uz vrijednost I_t veću i manju od eksperimentalno određene vrijednosti od $4,35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

4.2. Validacija Metode 2

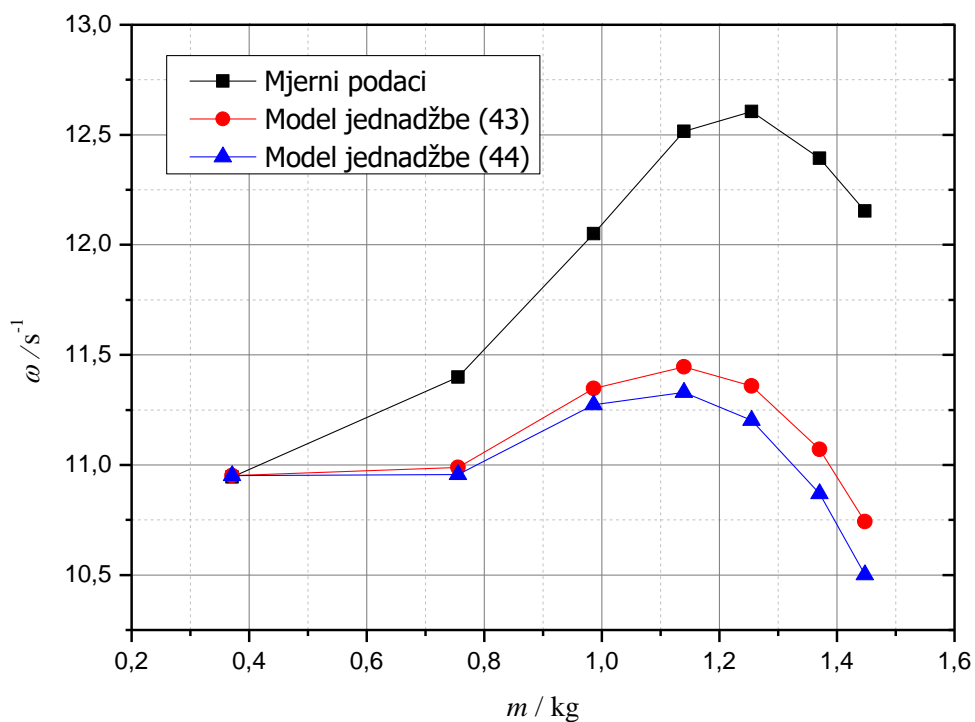
U ovom dijelu eksperimenta korišteno je više valjaka aluminijske legure koji su se slagali jedan na drugi u centru posude radi mjerenja kružne frekvencije titranja za različite mase uzorka, odnosno visine uzorka u posudi. U *Tablici 5.* su prikazani bitni podaci za proces validacije *Metode 2.*



Slika 16. Prikaz eksperimentalnih podataka kružne frekvencije titranja posude s uzorkom aluminijske legure u ovisnosti o masi uzorka i posude.

Tablica 5. Prikaz vrijednosti kružne frekvencije titranja posude s uzorkom pri pripadajućim vrijednostima mase uzorka, odnosno visine uzorka, mjerenih oko treće osi rotacije (brojeći od vrha).

<i>m / kg</i>	0,38483	0,61536	0,76866	0,88423	0,99961	1,07651
<i>h / m</i>	0,05004	0,08006	0,10006	0,11516	0,13020	0,14030
<i>ω / s⁻¹</i>	11,39938	12,05041	12,51634	12,6055	12,39414	12,15419
<i>R²</i>	0,99916	0,99902	0,99878	0,99896	0,99897	0,99702



Slika 17. Prikaz mjernih podataka s krivuljama modela jednađbe (43) i jednađbe (44).

Slika 18. pokazuje model jednađbe (43) ovisnosti kvadrata kružne frekvencije o masi uzorka za vrijednosti gustoće uzorka $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3 \pm 5.0 \%$, odnosno $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3 \pm 10.0 \%$. Vrijednost ostalih parametara korištenih u modelu (jednađba (43)) su:

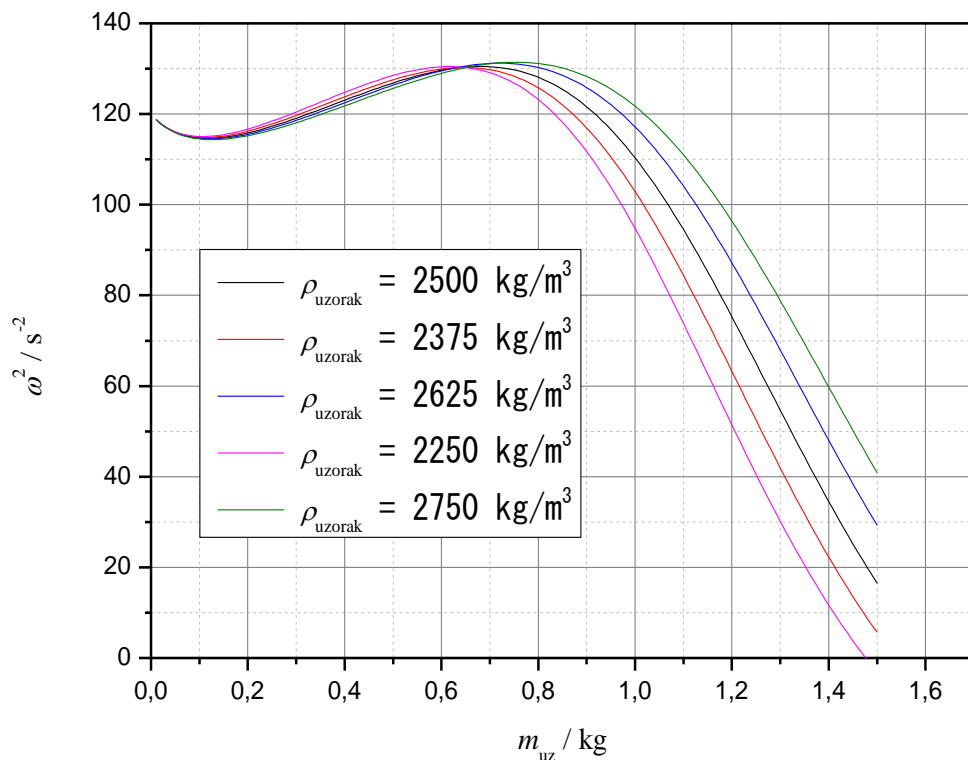
$$I_{t, \text{posude}} = 4,35 * 10^{-4} \text{ kg/m}^2$$

$$m_{\text{posude}} = 0,37082 \text{ kg}$$

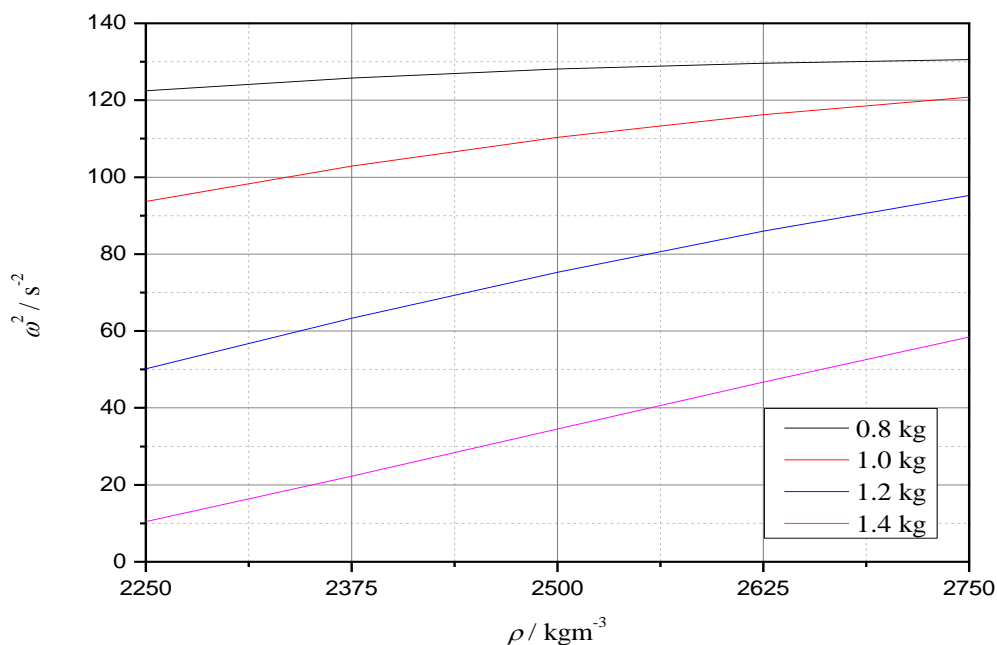
$$L_{\text{posude}} = 0,063194 \text{ m}$$

$$r_{\text{uzorka}} = 0,03 \text{ m}$$

Vidljivo je da gustoća uzorka utječe na kružnu frekvenciju titranja, posebice pri masi uzorka većoj od oko 0,8 kg. Ovisnost kvadrata kružne frekvencije titranja o gustoći uzorka nije linearna, no s porastom mase uzorka ovisnost postaje sve više linearna, posebice za masu uzorka od primjerice 1.4 kg, što je prikazano na *Slici 19*.



Slika 18. Prikaz ovisnosti kvadrata kružne frekvencije titranja posude ovisno o masi uzorka za različite vrijednosti gustoće uzorka (simulacija)



Slika 19. Prikaz ovisnosti kvadrata kružne frekvencije o gustoći ispitivanog uzorka uz istu odvagu uzorka (simulacija).

5. RASPRAVA

5.1. Kalibracija aparature

Za uspješno mjerenje titranja fizičkog njihala korištenjem konstruirane aparature potrebno je ostvariti određene preduvjete. Vijci koji definiraju os rotacije moraju biti čim manjeg promjera radi ostvarivanja što manje dodirne površine između njih i posude jer je ustanovljeno da imaju znatan utjecaj (trenje) na titranje posude. Osim trenja na mjestima objesišta, otpor i strujanje zraka također utječu na prigušenje titranja. U laboratoriju nije bilo moguće u potpunosti zaštititi aparaturu od promjena u strujanju zraka, a da se pri tome znatno ne oteža proces samog mjerenja te nije moguće niti provesti mjerenja u vakuumu.

Smanjenjem trenja s obzirom ograničenja strojne obrade vijaka te nemogućnost kontrole strujanja zraka u laboratoriju, rezultiralo je titranjem prazne posude tijekom više minuta. Amplituda se vrlo sporo mijenja, tj. postignuto je najmanje moguće prigušenje procesa titranja fizičkog njihala. Tijekom dugotrajnog titranja uočen je utjecaj vibracija poda (zbog hoda u laboratoriju i okolnim sobama) koje se prenose do aparature i uzrokuju nova titranja posude koje se superponiraju sa mjerenjem pri malim amplitudama titranja. Na taj način, slučajni utjecaji okoline dodatno negativno utječu na mjerenje jer se tada ne dobije realna slika procesa titranja. Daljnja su mjerenja bila značajno prigušena uporabom jakog magneta smještenog neposredno ispod dna. Na taj način titranje aluminijske posude (nosača uzorka) traje svega desetak sekundi umjesto nekoliko minuta.

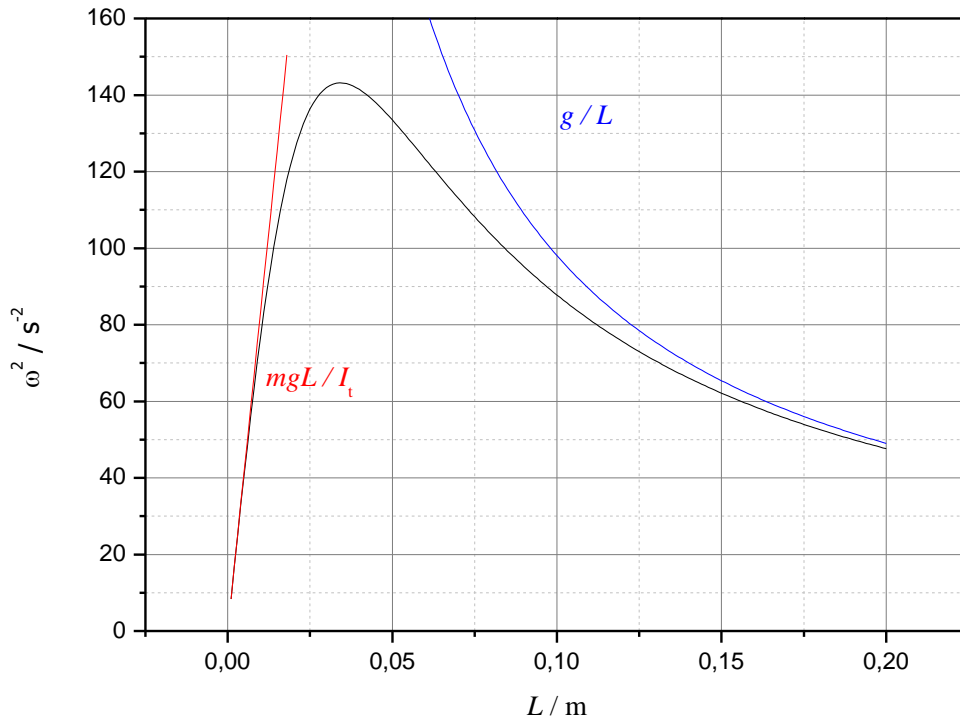
Što je prigušenje titranja veće, to se izmjerena kružna frekvencija više razlikuje od frekvencije titraja neprigušenog harmoničkog oscilatora, ali ovo namjerno izazvano prigušenje je nužan kompromis koji olakšava samo mjerenje.

Odašiljač i detektor transmisijskog optičkog senzora napajani su zasebnim baterijama čime je izbjegnuta šum laboratorijski izvor istosmjernog napajanja.

Slike 9.-12. pokazuju odlično slaganje izmjerene krivulje prigušenog titranja prazne posude te modela utočnjavanja prema jednadžbi (47), što dokazuje vrijednost R^2 koja je za svaku krivulju veća od 0.999.

Povećanje kružne frekvencija titranja prazne posude objašnjava se smanjivanjem udaljenosti između osi titranja (počevši od osi 1 na vrhu prema osi 4) i težišta posude. Ovakav trend je u skladu s teorijom jer proučavajući jednadžbu (25), vidljivo je da se smanjenjem vrijednosti L nazivnik jednadžbe smanjuje više nego brojnik, zato što je u njemu vrijednost L

kvadrirana dok to ona u brojniku nije. Nadalje, za male vrijednosti L , dominira promjena brojnika (linearno s povećanjem L), te ω^2 raste gotovo linearno $L \rightarrow 0$. Za velike vrijednosti L , u nazivniku dominira član uz L^2 , te ω^2 opada približno kao $1/L$ (Slika 18.).



Slika 18. Granične vrijednosti ω^2 u ovisnosti o L . Za male vrijednosti L dolazimo do pravca kroz ishodište s koeficijentom smjera mgL/I_T , a za velike vrijednosti L , ω^2 približava se krivulji g/L . Krivulja prema modelu fizičkog njihala (jednadžba (25)), uz: $m = 0,37082$ kg, $g = 9,80662$ ms⁻² i $I_t = 4,35 \cdot 10^{-4}$ kgm².

Rezultati udaljenosti osi rotacija od težišta, L , razlikuju se ovisno o tome je li dobiveni računskim ili grafičkim putem. Računski određeni L je točniji od grafičkog, zato što se grafički način izračuna sastojao od očitavanja dva para vrijednosti ($I_t - I_{t,n+x}$) i L (najmanja pozitivna i najmanja negativna vrijednost) s dobivenog grafa, zaokruživanjem očitanih vrijednosti na određeni broj značajnih znamenki te interpoliranjem u uvjetima $I=0$. Istinsko grafičko određivanje L , dakle bez interpolacija već očitavanje s grafa, bi bilo moguće samo za manji broj značajnih znamenki. U računskom određivanju L ima mnogo manje koraka samoga računa u kojima bi moglo doći do pogreške. Zbog navedenih razloga su se za buduće izračune koristili

podaci dobiveni računskim putem.

Dobivene vrijednosti udaljenosti prve osi rotacije od težišta prazne posude, a time i moment inercije prazne posude oko osi rotacije koja prolazi kroz njeno težište, razlikuju se ovisno o kombinaciji osi rotacija oko kojih je izmjerena kružna frekvencija. Iako je bilo za očekivati dobiti jednake rezultate za svaku kombinaciju, razlike se mogu pripisati pogreškama u mjerenju i geometriji aparature, te zbog utjecaja okoline koji izazivaju dodatna titranja posude koja se superponiraju na početno izazvano titranje. Drugi razlog mogućih razlika je utjecaj člana mL^2 , tj. dio jednadžbe kojega opisuje *Steinerov poučak*, koji može biti nekoliko reda veličine veći ili manji od same vrijednosti I_t . Što je veća razlika u redu veličine vrijednosti I_t i člana mL^2 , to postoji veća mogućnost za pojavu pogreške prilikom računa (i mjerenja) što zornije prikazuje sljedeća tablica (vrijednosti $m=0,37082$ kg, tj. masa prazne posude):

I_t (prazne posude)	$4.35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$
mL^2 ($L = 0.100 \text{ m}$)	$3.71 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
mL^2 ($L = 0.010 \text{ m}$)	$3.71 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$
mL^2 ($L = 0.001 \text{ m}$)	$3.71 \cdot 10^{-7} \text{ kgm}^2$

Vidljivo je da nije dobro provoditi mjerenja na udaljenostima većim od 0.100 m jer je tada član mL^2 znatno veći od I_t što znači da će rezultat njihove razlike biti mali broj što omogućava nastajanje velike pogreške. Također, ne bi trebalo provoditi mjerenja na udaljenostima manjim od 0.010 m jer je tada doprinos člana mL^2 nedovoljno malen da ga se smatra zanemarivim, a dovoljno velik da uvodi pogreške prilikom računa.

Konačno, moguća je pogreška same metode i početne hipoteze, iz koje je ona nastala, da se dobivene vrijednosti neće razlikovati.

Ekperimentalno određena vrijednost momenta inercije prazne posude oko osi rotacije koja prolazi kroz njeno težište, I_t , iznosi $4.35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$. Iako je relativno standardno odstupanje pojedinih vrijednosti, ovisno o kombinaciji osi rotacija korištenih u računu, znatno u usporedbi sa srednjom vrijednosti (Tablica 4), *Slika 14.* pokazuje dobro slaganje modela s eksperimentom (eksperimentalne vrijednosti prate trend modela te se pojedine točke gotovo podudaraju s modelom). Krivulja prikazana na *Slici 14.* je rezultat korištenog modela u izračunu gdje je kao

brojčana vrijednost parametra I_t uzeta srednja vrijednost izračunatog momenta inercije: $4.35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

Slika 15. pokazuje simulaciju ponašanja prazne posude za različite vrijednosti njenog momenta inercije. Vidljivo je da se povećanjem momenta inercije smanjuje maksimum kružne frekvencije i početni nagib krivulje. U početnom dijelu krivulje, gdje je ovisnost kvadrata kružne frekvencije titranja linearna o udaljenosti osi rotacije od težišta posude, nije toliko izražena promjena ovisno o momentu inercije (iako to ne znači da je zanemariva), ali to nije slučaj ako promatramo maksimum krivulje i široko područje oko njega. Ova simulacija pokazuje da je bitno znati moment inercije same posude radi preciznijeg utočnjavanja eksperimentalnih podataka s matematičkim modelom. Za što preciznije određivanje momenta inercije fizičkog njihala, potrebno je mjerenja provoditi na udaljenostima osi rotacije od težišta gdje krivulja ima čim veći nagib, a da je čim bliže maksimumu (ne u neposrednoj blizini maksimuma jer je tamo promjena kvadrata kružne frekvencije relativno mala s promjenom L), zato što te vrijednosti imaju najveći utjecaj na izgled krivulje.

5.2. Validacija Metode 2

Eksperimentalni podaci prikazani na *Slici 16.*, pokazuju trend odnosno kvalitativnu sličnost sa matematičkim modelom jednačbe (43) i jednačbe (44). Kvantitativno slaganje mjernih podataka s modelom nisu izrazita što može biti posljedica manjka matematičkog modela ili nedostatak točnosti parametara koji se smatraju poznatima. Nadalje, neslaganje matematičkog modela jednačbe (43) i (44) može se objasniti mogućnošću da stvarna gustoća uzorka nije jednaka onoj deklariranoj, također treba uzeti u obzir vjerojatnost mjernih pogrešaka koje su se mogle dogoditi prilikom karakterizacije uzoraka.

Slika 18. pokazuje model jednačbe (43) gdje se provjerava teorijska ovisnost kružne frekvencije titranja o masi uzorka za različite vrijednosti gustoće uzorka. Može se primijetiti da je razlika kružne frekvencije neznatna za mase do 0.7 kg dok ona postaje jasna i značajna tek za mase veće od oko 0.8 kg. Dakle, mogućnost procjene gustoće uzorka uporabom ove aparature moguće je samo za mase veće od 0.8 kg što je posljedica velike mase prazne posude ($m = 0,37082$ kg).

Slika 19. pokazuje da promjena kružne frekvencije, za istu odvagu uzorka, nije linearna s obzirom na različitu gustoću uzorka za slučajeve gdje je masa uzorka jednaka 0.8 kg, 1.0 kg te 1.2 kg dok za masu od 1.4 kg jest. Na taj način moguće je izmjeriti gustoću polidisperznog uzorka čestica uobičajene gustoće (karbonatni i silikatni materijali) i poroznosti.

Temeljem prikaza sa *Slike 18.* i *Slike 19.*, u izvedenoj aparaturi teorijski je utemeljeno mjerenje gustoće, tj. nasipne gustoće polidisperznog uzorka poput pijeska, šljunka, cementa i sl.

6. ZAKLJUČAK

Aparatura, konstruirana za potrebe provođenja eksperimentalnog dijela ovoga rada, je izvedena na zadovoljavajućoj razini s obzirom na smanjenje trenja iako postoji mogućnost napretka. Trenje na dodirnim točkama posude i osi rotacije može se dodatno smanjiti korištenjem još tanjih vijaka, čime bi se smanjila dodirna površina, i primjenom krutih maziva poput grafita. Također, aparaturu bi bilo potrebno adekvatno izolirati od utjecaja lokalnih vibracija i strujanja zraka, a da se pri tome dodatno ne oteža samo mjerenje. Kada bi se ti uvjeti zadovoljili, bilo bi moguće izazvati minimalno prigušeno titranje, odnosno bilo bi moguće provesti gotovo harmoničko titranje.

Grafički način određivanja momenta inercije posude je jednostavniji u provedbi i samom određivanju željene vrijednosti, a je računski točniji.

Dobivene vrijednosti udaljenosti težišta prazne posude od osi rotacije razlikuju se ovisno o kombinaciji korištenih paralelnih osi što može biti rezultat nedostataka metode i same aparature. Dobivena srednja vrijednost je dobra procjena stvarne pozicije težišta, ali ona bi se mogla ispitati modifikacijom aparature na način da postoji veća fleksibilnost odabira osi rotacije čime bi se moglo aparaturu dovesti do indiferentne ravnoteže. Navedeni način bi, ovisno o broju pozicija na kojima bi se mogla izvesti os rotacije, dao jednoznačnu informaciju o položaju težišta. Dobivena srednja vrijednost udaljenosti težišta prazne posude od najudaljenije osi rotacije iznosi $L = 109,25$ mm.

Eksperimentalno određena vrijednost momenta inercije prazne posude kroz os rotacije koja prolazi težištem iznosi $I_t = 4.35 \cdot 10^4$ kgm² što je dobra aproksimacija jer se svi mjerni podaci nalaze u blizini krivulje modela u kojemu je korištena navedena vrijednost momenta inercije. Nadalje, čim točnije poznavanje momenta inercije je bitno radi mogućnosti preciznog utočnjavanja eksperimentalnih podataka s matematičkim modelom te *Slika 15.* ukazuje na to da bi se mjerenja trebala provoditi u područjima krivulje gdje dobiveni podaci imaju najveći utjecaj na izgled krivulje, a to je na udaljenostima L gdje krivulja ima najveći nagib koji je u blizini maksimuma (isključivši usko područje oko samog maksimuma).

Model koji opisuje promjenu kružne frekvencije posude s uzorkom pokazuje kvalitativnu sličnost eksperimentalno dobivenim podacima, ali ne i kvantitativnu što znači da u njemu nedostaju određeni parametri koji bi bolje opisali ovakav sustav. Iz *Slike 18.* je vidljivo da je ovaj sustav osjetljiv na promjenu gustoće uzorka tek na masama većim od 0.8 kg. Za

poboljšanje mjerenja bi bilo potrebno što više smanjiti utjecaj same posude što se bi se najlakše postiglo smanjenjem njezine mase, odnosno izradom posude iz nekog drugog materijala poput, npr. plastike.

7. LITERATURA

- [1] Zelić, J., Praktikum iz procesa anorganske industrije, Interna skripta, Kemijsko-tehnološki fakultet, Split, siječanj 2013.
- [2] Henč-Bartolić, V., Kulišić, P., Valovi i optika, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
- [3] Volovšek, V., Lopac, V., Titranje, Interna skripta, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb, 2010.
- [4] Kojić, M., Mićunović, M, Teorija oscilacija, Naučna knjiga, Beograd
- [5] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/icyl.html#icyl> (pristupio 10.2.2021.)
- [6] Richter, B., Wilmes, H., Lothhammer, A., Falk, R., Čolić, K., Pribičević, B., Absolute gravity measurements in Croatia, Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, Faculty of Geodesy, University of Zagreb, 1998.

8. POPIS SIMBOLA

A , amplituda titranja, [m]

F , sila, [N]

g , ubrzanje sile teže, [ms^{-2}]

G , sila teža, [N]

h , visina uzorka, [m]

H , udaljenost osi rotacije od dna posude, [m]

I , moment inercije, [kgm^2]

L , udaljenost osi rotacije od težišta fizičkog njihala, [m]

m , masa, [kg]

M , moment sile teže, [J]

N , napetost niti, [N]

ρ , gustoća, [kgm^{-3}]

ϑ , kut odklona oscilatora od ravnotežnog položaja, [$^\circ$]

s , udaljenost oscilatora od ishodišta, [m]

T , period titranja, [s]

φ_0 , početna faza, [$^\circ$]

V , volumne, [m^3]

ω , kružna frekvencija titranja, [s^{-1}]

9. PRILOZI

Svojstva TCST2103 (podaci proizvođača):



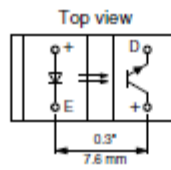
TCST2103, TCST2202, TCST2300

Vishay Semiconductors

Transmissive Optical Sensor with Phototransistor Output



19180_4



19180_3

DESCRIPTION

The TCST2103, TCST2202, and TCST2300 are transmissive sensors that include an infrared emitter and phototransistor, located face-to-face on the optical axes in a leaded package which blocks visible light. These part numbers include options for aperture width.

FEATURES

- Package type: leaded
- Detector type: phototransistor
- Dimensions (L x W x H in mm): 24.5 x 6.3 x 10.8
- Gap (in mm): 3.1
- Typical output current under test: $I_C = 4$ mA (TCST2103)
- Typical output current under test: $I_C = 2$ mA (TCST2202)
- Typical output current under test: $I_C = 0.5$ mA (TCST2300)
- Daylight blocking filter
- Emitter wavelength: 950 nm
- Lead (Pb)-free soldering released
- Compliant to RoHS directive 2002/95/EC and in accordance to WEEE 2002/96/EC



RoHS COMPLIANT

APPLICATIONS

- Optical switch
- Photo interrupter
- Counter
- Encoder

PRODUCT SUMMARY				
PART NUMBER	GAP WIDTH (mm)	APERTURE WIDTH (mm)	TYPICAL OUTPUT CURRENT UNDER TEST ⁽¹⁾ (mA)	DAYLIGHT BLOCKING FILTER INTEGRATED
TCST2103	3.1	1	4	Yes
TCST2202	3.1	0.5	2	Yes
TCST2300	3.1	0.25	0.5	Yes

Note

⁽¹⁾ Conditions like in table basic characteristics/coupler

ORDERING INFORMATION			
ORDERING CODE	PACKAGING	VOLUME ⁽¹⁾	REMARKS
TCST2103	Tube	MOQ: 1020 pcs, 85 pcs/tube	With mounting flange
TCST2202	Tube	MOQ: 1020 pcs, 85 pcs/tube	With mounting flange
TCST2300	Tube	MOQ: 1020 pcs, 85 pcs/tube	With mounting flange

Note

⁽¹⁾ MOQ: minimum order quantity

ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS ⁽¹⁾				
PARAMETER	TEST CONDITION	SYMBOL	VALUE	UNIT
COUPLER				
Total power dissipation	$T_{amb} \leq 25$ °C	P_{tot}	250	mW
Ambient temperature range		T_{amb}	- 55 to + 85	°C
Storage temperature range		T_{stg}	- 55 to + 100	°C
Soldering temperature	Distance to package: 2 mm; $t \leq 5$ s	T_{sd}	260	°C

TCST2103, TCST2202, TCST2300

Vishay Semiconductors Transmissive Optical Sensor with Phototransistor Output



ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS (1)				
PARAMETER	TEST CONDITION	SYMBOL	VALUE	UNIT
INPUT (EMITTER)				
Reverse voltage		V_R	6	V
Forward current		I_F	60	mA
Forward surge current	$t_p \leq 10 \mu s$	I_{FSM}	3	A
Power dissipation	$T_{amb} \leq 25^\circ C$	P_V	100	mW
Junction temperature		T_J	100	$^\circ C$
OUTPUT (DETECTOR)				
Collector emitter voltage		V_{CEO}	70	V
Emitter collector voltage		V_{ECO}	7	V
Collector peak current	$t_p/T = 0.5, t_p \leq 10 ms$	I_{CM}	200	mA
Power dissipation	$T_{amb} \leq 25^\circ C$	P_V	150	mW
Junction temperature		T_J	100	$^\circ C$

Note

(1) $T_{amb} = 25^\circ C$, unless otherwise specified

ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

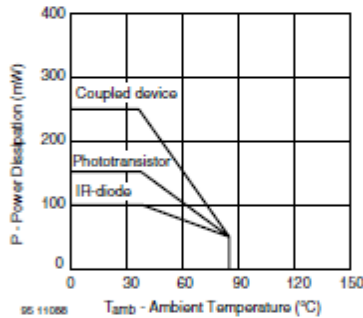


Fig. 1 - Power Dissipation Limit vs. Ambient Temperature

BASIC CHARACTERISTICS (1)							
PARAMETER	TEST CONDITION	PART	SYMBOL	MIN.	TYP.	MAX.	UNIT
COUPLER							
Current transfer ratio	$V_{CE} = 5 V, I_F = 20 mA$	TCST2103	CTR	10	20		%
		TCST2202	CTR	5	10		%
		TCST2300	CTR	1.25	2.5		%
Collector current	$V_{CE} = 5 V, I_F = 20 mA$	TCST2103	I_C	2	4		mA
		TCST2202	I_C	1	2		mA
		TCST2300	I_C	0.25	0.5		mA
Collector emitter saturation voltage	$I_F = 20 mA, I_C = 1 mA$	TCST2103	V_{CEsat}			0.4	V
	$I_F = 20 mA, I_C = 0.5 mA$	TCST2202	V_{CEsat}			0.4	V
	$I_F = 20 mA, I_C = 0.1 mA$	TCST2300	V_{CEsat}			0.4	V
Resolution, path of the shutter crossing the radiant sensitive zone	$I_{Ccrit} = 10\% \text{ to } 90\%$	TCST2103	s		0.6		mm
		TCST2202	s		0.4		mm
		TCST2300	s		0.2		mm



TCST2103, TCST2202, TCST2300

Transmissive Optical Sensor with Phototransistor Output Vishay Semiconductors

BASIC CHARACTERISTICS (1)							
PARAMETER	TEST CONDITION	PART	SYMBOL	MIN.	TYP.	MAX.	UNIT
INPUT (EMITTER)							
Forward voltage	$I_F = 60 \text{ mA}$		V_F		1.25	1.6	V
Junction capacitance	$V_R = 0 \text{ V}, f = 1 \text{ MHz}$		C_j		50		pF
OUTPUT (DETECTOR)							
Collector emitter voltage	$I_C = 1 \text{ mA}$		V_{CE0}	70			V
Emitter collector voltage	$I_E = 10 \mu\text{A}$		V_{ECO}	7			V
Collector dark current	$V_{CE} = 25 \text{ V}, I_F = 0 \text{ A}, E = 0 \text{ lx}$		I_{CEO}			100	nA
SWITCHING CHARACTERISTICS							
Turn-on time	$I_C = 2 \text{ mA}, V_S = 5 \text{ V}, R_L = 100 \Omega$ (see figure 2)		t_{on}		10		μs
Turn-off time	$I_C = 2 \text{ mA}, V_S = 5 \text{ V}, R_L = 100 \Omega$ (see figure 2)		t_{off}		8		μs

Note

(1) $T_{amb} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, unless otherwise specified

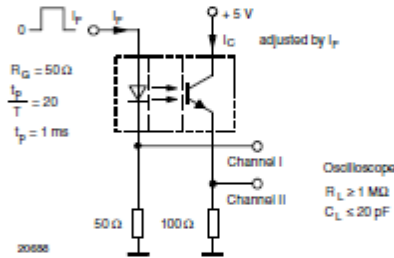


Fig. 2 - Test Circuit for t_{on} and t_{off}

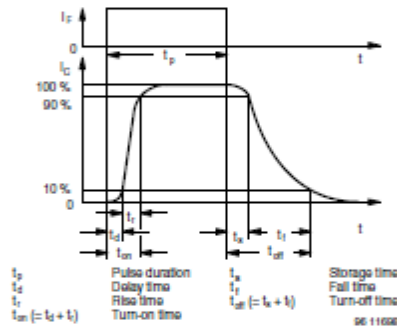


Fig. 3 - Switching Times

BASIC CHARACTERISTICS

$T_{amb} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, unless otherwise specified

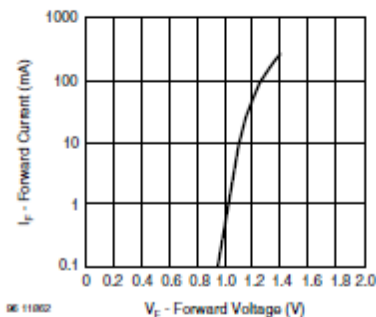


Fig. 4 - Forward Current vs. Forward Voltage

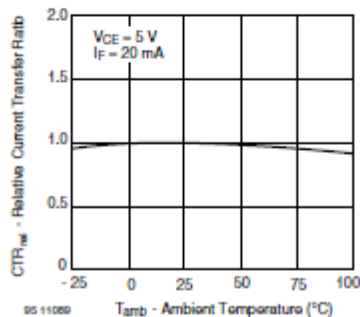


Fig. 5 - Relative Current Transfer Ratio vs. Ambient Temperature

TCST2103, TCST2202, TCST2300

Vishay Semiconductors Transmissive Optical Sensor with Phototransistor Output

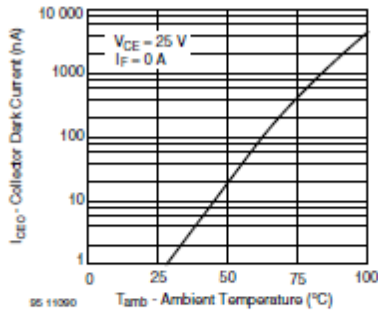


Fig. 6 - Collector Dark Current vs. Ambient Temperature

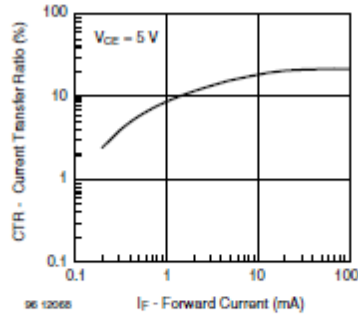


Fig. 9 - Current Transfer Ratio vs. Forward Current

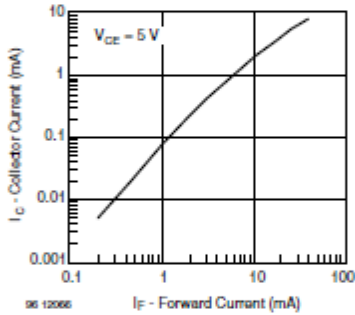


Fig. 7 - Collector Current vs. Forward Current

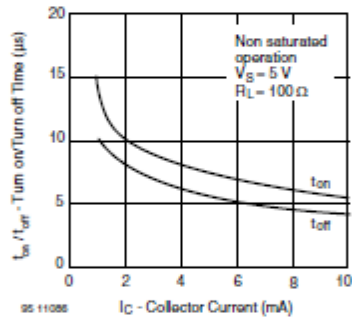


Fig. 10 - Turn-off/Turn-on Time vs. Collector Current

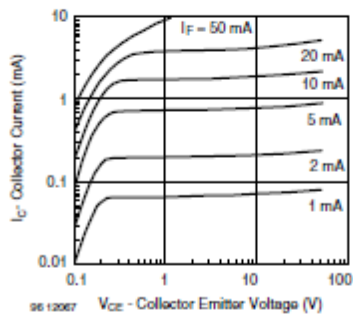


Fig. 8 - Collector Current vs. Collector Emitter Voltage

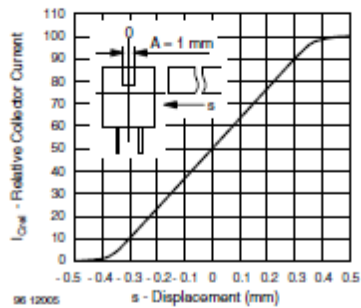


Fig. 11 - Relative Collector Current vs. Displacement



TCST2103, TCST2202, TCST2300

Transmissive Optical Sensor with Phototransistor Output Vishay Semiconductors

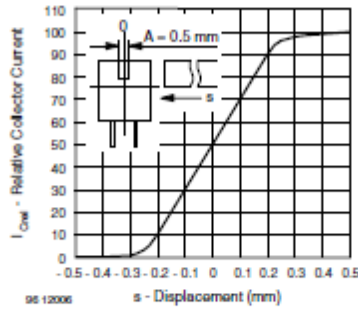


Fig. 12 - Relative Collector Current vs. Displacement

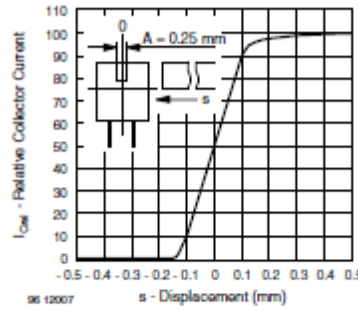
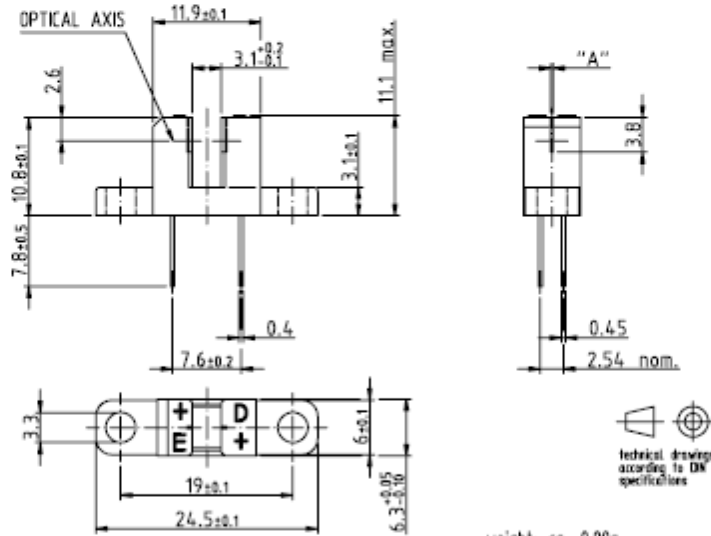


Fig. 13 - Relative Collector Current vs. Displacement

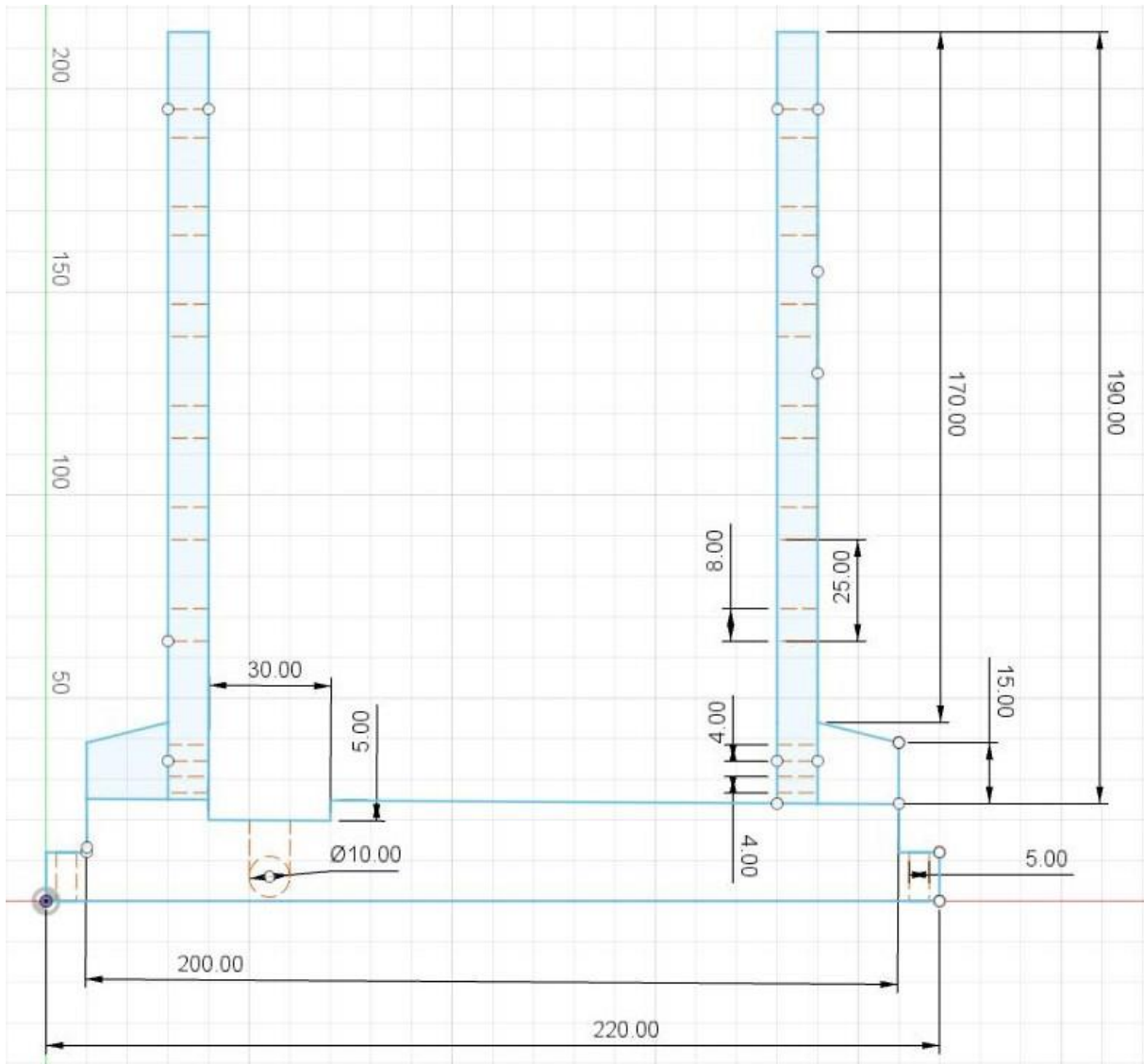
PACKAGE DIMENSIONS in millimeters



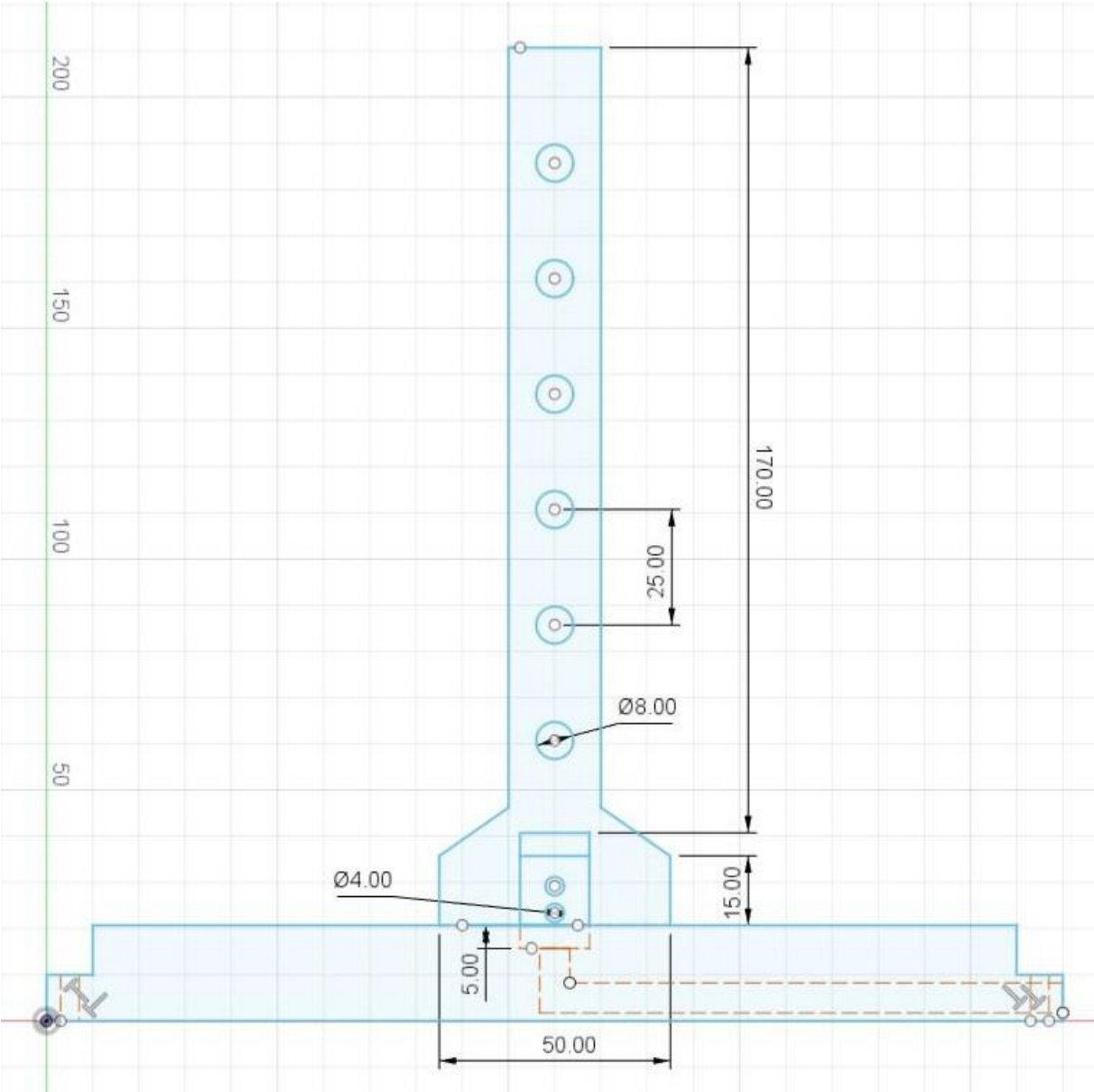
Drawing-No.: 6.550-5040.01-4
 Issue: 2; 10.11.08
 pc 0506

weight: ca. 0.90g

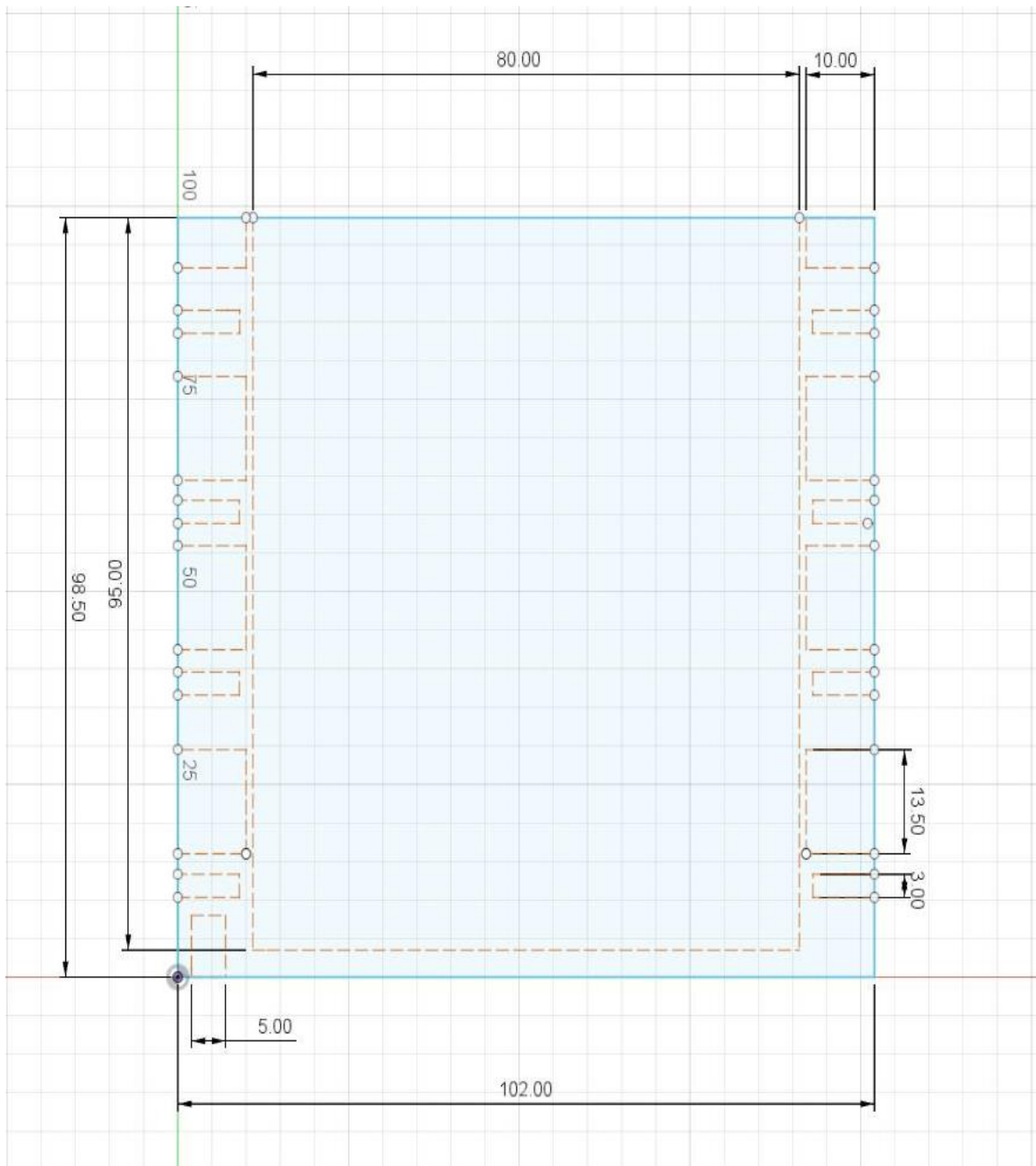
Postolje:



Postolje, bokocrt:



Posuda:



Posuda, tlocrt:

