

# Numeričko rješenje modela nestacionarnog prijenosa topline u višeslojnom zidu s izvorima i ponorima topline

---

Brkić, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Chemical Engineering and Technology / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:149:053316>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



FKITMCMXIX

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Chemical Engineering and Technology University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ

Filip Brkić

# DIPLOMSKI RAD

Zagreb, rujan 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE  
SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ

Filip Brkić

NUMERIČKO RJEŠENJE MODELA NESTACIONARNOG  
PRIJENOSA TOPLINE U VIŠESLOJNOM ZIDU S IZVORIMA I  
PONORIMA TOPLINE

DIPLOMSKI RAD

Voditelj rada: prof.dr.sc. Juraj Šipušić

Članovi ispitne komisije:

prof.dr.sc. Juraj Šipušić

prof.dr.sc. Aleksandra Sander

prof.dr.sc. Jasna Prlić Kardum

Zagreb, rujan 2018.

## **SAŽETAK RADA**

U ovom radu opisan je rad Peltierova uređaja. Za isti je dan teorijski model koji predviđa njegovo toplinsko ponašanje kad se nalazi između dva materijala. Model se riješio numeričkom metodom i provjerio eksperimentalnim mjerenjima temperatura pri različitim strujama rada Peltierova elementa. Kao rezultat dobiven je graf ovisnosti temperatura na hladnoj i toploj strani Peltierova elementa o vremenu. Napravljena je usporedba ovog modela s literaturnim i raspravljen je utjecaj parametara na rezultate modela.

Ključne riječi: Peltierov element, nestacionaran prijenos topline, teoretski model

## Abstract

This study describes the work process of a Peltier device. A theoretical model is given which predicts its behaviour when placed between two materials. The model is solved by a numerical method and validated with experimental measurements of temperatures at different current strengths. The result is a graph consisting of temperatures at cold and hot side versus time. This model is compared with existing literature and the influence of its parameters on the results is discussed.

Keywords: Peltier device, transient heat conduction, theoretical model

## **SADRŽAJ**

<b>UVOD</b> .....	1
<b>OPĆI DIO</b> .....	2
Termodinamički sustav .....	2
Bilanca energije termodinamičkog sustava .....	3
Temperatura i toplina .....	3
Kondukcija .....	4
Konvekcija.....	6
Radijacija.....	6
Peltierov element .....	7
Seebeckov efekt.....	8
Peltierov efekt.....	8
Jouelova toplina.....	9
Thompsonov efekt.....	9
Kondukcija topline .....	9
Bilanca topline.....	9
Matematički model Peltierova elementa između dva ista uzorka .....	10
<b>EKSPERIMENTALNI DIO</b> .....	14
Način ispitivanja.....	15
Proračun.....	15
<b>REZULTATI</b> .....	16
<b>RASPRAVA</b> .....	23
<b>ZAKLJUČAK</b> .....	26
<b>LITERATURA</b> .....	27
<b>POPIS OZNAKA I MJERNIH JEDINICA</b> .....	29
<b>PRILOG</b> .....	30
<b>ŽIVOTOPIS</b> .....	33

## UVOD

Svojstva materijala su sve bitnija u svakodnevnom životu. Sve stroži standardi i zahtjevi kupaca stvaraju ogroman pritisak na proizvođače i inženjere koji zbog sve veće konkurencije na tržištu moraju osigurati potrebnu kvalitetu uz što nižu cijenu. Jedna od brojnih svojstava koje materijal ili proizvod mora zadovoljiti su i toplinska svojstva. Toplinska svojstva su od posebne važnosti za rad hladnjaka, izmjenjivača topline, mikroprocesora idr. Uobičajena toplinska svojstva materijala su: toplinski kapacitet, najčešće izražen kao specifični toplinski kapacitet,  $c / \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ , volumni toplinski kapacitet, zapravo produkt specifičnog toplinskog kapaciteta i gustoće materijala,  $c_v / \text{Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$  i toplinska vodljivost,  $\lambda / \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . U problemima nestacionarnog prijenosa topline kondukcijom pojavljuje se i toplinska difuzivnost koja nije neko novo svojstvo nego slijedi iz poznatih veličina toplinske vodljivosti i volumnog toplinskog kapaciteta,  $a = \lambda/\rho c$ ,  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .

Uz velik broj publiciranih vrijednosti toplinskih svojstava materijala, dostupan je i opis brojnih standardnih metoda mjerenja toplinskih svojstava. Potrebno je napomenuti da publicirane vrijednosti, poput primjerice toplinske vodljivosti, uvelike ovise o čistoći, homogenosti ili poroznosti uzorka, te svojstvo materijala od konkretnog interesa često odstupa od publiciranih vrijednosti. Nadalje, moguće je da za pripremljeni novi materijal i nema publiciranih toplinskih (i općenito drugih) svojstava, zbog čega su potrebna mjerenja koja su pak skupa ili njihova izvedba (standardnih metoda) nije moguća u konkretnom slučaju *in-situ*.

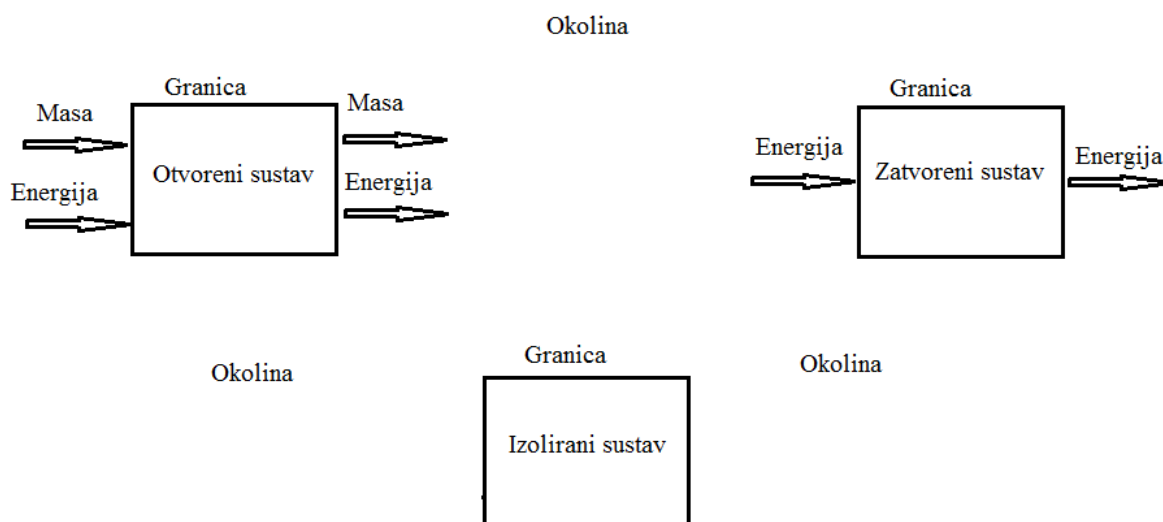
Ovaj rad se nadovezuje na prethodni [1] u kojem je osmišljena aparatura za kvalitativno mjerenje toplinskih svojstava pomoću Peltierova elementa. Peltierov element, zapravo niz serijski spojenih stupića p- i n-tipova poluvodiča na osnovi bizmutova selenida zaštićenih keramičkom pločicom, odabran je zbog niske cijene i mogućnosti *in-situ* izvedbe mjerenja s posebnim interesom kod praćenja promjene svojstava betona.

Cilj ovog rada je razviti i riješiti matematički model kojim bi se kvantitativno odredilo toplinsko svojstvo materijala iz tranzijentnog odziva dobivenog pobudom Peltierova elementa u neposrednom doticaju s ispitivanim materijalom.

## OPĆI DIO

### Termodinamički sustav

Kad se govori o modeliranju bilo kojeg procesa, prvi korak je definiranje sustava. Sustav je neka količina tvari ili volumen prostora koji je odabran za istraživanje [2]. U nastavku će biti riječi isključivo o termodinamičkim sustavima koji su fizikalni i čiji je predmet istraživanja međusobna pretvorba topline i drugih oblika energije. Prostor izvan termodinamičkog sustava zove se okolina, a površina između okoline i sustava se zove granica, realna ili imaginarna. Oni mogu uzajamno djelovati s okolinom ili s drugim sustavima. Ovisno o uvjetima međusobnog djelovanja postoje tri vrste termodinamičkih sustava: otvoreni, zatvoreni i izolirani (Slika 1.) [2].



Slika 1. Prikaz vrsta termodinamičkih sustava

Zatvoreni termodinamički sustav ima granice koje su nepropusne za materiju, tj. njegova masa je konstantna dok energija može prelaziti granicu, odnosno ulaziti u sustav ili izlaziti iz njega.

Otvoreni termodinamički sustav ima granice propusne i za materiju i za energiju. Masa u sustavu ostaje konstantna samo ako je maseni protok na ulazu jednak onom na izlazu.

Izolirani termodinamički sustav ne propušta ni masu ni energiju kroz granicu. Svaki takav sustav je zatvoren, ali svaki zatvoren sustav ne mora biti izolirani [3].



Svaka karakteristika sustava se zove svojstvo. Neka od svojstava su tlak  $p$ , temperatura  $T$ , volumen  $V$ , no ima ih još puno manje poznatih, ovisno o sustavu koji se promatra. Dije se na intenzivna (ne ovise o masi sustava) i ekstenzivna (ovise o masi sustava) ili ravnotežna (ne mijenjaju se s vremenom bez vanjskog djelovanja) i neravnotežna (mijenjaju se s vremenom) [3].

### **Bilanca energije termodinamičkog sustava**

Bilanca energije bilo kojeg sustava se temelji na zakonu očuvanja energije koji kaže da je u zatvorenom fizikalnom sustavu zbroj svih oblika energije (mehaničke, toplinske, električne, magnetske itd.) konstantan. Drugim riječima, u zatvorenom sustavu jedan oblik energije može prelaziti u druge oblike, a da se pri tom energija niti stvara niti poništava. Promjena ukupne energije izoliranoga sustava jednaka je nuli [4]. Ako je  $\Delta E_{uk}$  promjena energije u sustavu,  $E_{ulaz}$  energija koja ulazi u sustav, a  $E_{izlaz}$  energija koja izlazi iz sustava onda matematički zapisano taj zakon izgleda:

*promjena toplinske energije = toplina koja ulazi – toplina koja izlazi*

$$\Delta E_{uk} = E_{ulaz} - E_{izlaz} . \quad (1)$$

### **Temperatura i toplina**

Temperatura je jedna od osnovnih fizikalnih veličina u Međunarodnom sustavu jedinica, koja opisuje toplinsko stanje i sposobnost tijela ili tvari da izmjenjuju toplinu s okolinom [5]. U fizičkom smislu preko nje određujemo je li tijelo toplo ili hladno. Ona ovisi o tome koliko unutarnje energije sadrži neko tijelo određene mase i tlaka, a prema molekularno-kinetičkoj teoriji plinova definira je kao mjera srednje kinetičke energije gibanja molekula [3]. Kada se dva tijela različitih temperatura dovedu u kontakt, toplina će spontano prelaziti s tijela više temperature na tijelo niže temperature sve dok se temperature tih dvaju tijela ne izjednače nakon čega nema daljnog prijenosa topline i tijela su u stanju toplinske ravnoteže. Jednakost temperatura je jedini preduvjet za postizanje toplinske ravnoteže [2] i iz njega je proizašao nulti zakon termodinamike koji glasi [6]: 'Ako su dva sustava u ravnoteži s trećim, onda su i međusobno u ravnoteži.' Ovaj zakon služi kao osnova za mjerenje temperature, ako se treće tijelo zamijeni s termometrom.

Temperatura je intenzivna veličina pa se ona mjeri posredno, preko nekog drugog svojstva od čega su najpoznatiji termometri koji mjere promjenu volumena (živin i alkoholni) i iz nje se očita temperatura koja je prikazana na jednoj od temperaturnih skala. Prema SI-sustavu mjeri se apsolutnom skalom u kelvinima (K), pri čemu je jedinica mjere 1/273,15 dijela razmaka od apsolutne nule i trojne točke vode [3]. Apsolutna nula temperature je

temperatura pri kojoj termodinamički sustav ima najmanju energiju. Ona iznosi 0 K i tada prestaju sva molekulska gibanja koja bi se mogla prenositi toplinom [7].

Toplina (količina topline, oznaka fizičke veličine  $Q$ ) je fizikalna veličina kojom se opisuje energija koja prelazi s toplijega tijela na hladnije. Mjerna jedinica topline u SI sustavu mjernih jedinica jest džul (J). Toplina koja se izmjenjuje pri dodiru dvaju tijela različitih temperatura ovisi o masi  $m$  tijela, specifičnom toplinskom kapacitetu  $c$  tvari od koje se tijelo sastoji te o promjeni temperature s vremenom  $\frac{dT}{dt}$  [8]:

$$Q = c_p m \frac{dT}{dt}. \quad (2)$$

Prethodna jednadžba ima smisao akumulacije topline u tijelu tj. govori koliko će se energije dovesti ili odvesti tom tijelu ako mu se temperatura promjeni za  $\Delta T$ . Često je bitno definirati i brzinu prijenosa topline u jedinici vremena  $t$  koja se zove toplinski tok  $\Phi$  ( $\text{Js}^{-1}$ ) [2]:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \Phi dt. \quad (3)$$

Ako je toplinski tok konstantan onda prethodna jednadžba prelazi u:

$$Q = \Phi \Delta t. \quad (4)$$

$\Delta t$  je vremenski interval koji se odvija od  $t_1$  do  $t_2$ .

Pod pojmom toplina se u termodinamici uvijek misli na prijenos topline. Tri su načina prijenosa topline: kondukcija, konvekcija i radijacija.

## Kondukcija

Kondukcija (vođenje) je prijenos topline koji se ostvaruje između dva tijela ili između dijelova tijela na različitim temperaturama međusobnim djelovanjem susjednih molekula različitih brzina titranja oko ravnotežnog položaja. Što je temperatura tvari viša, to je veća kinetička energija molekula, pa je kondukcija prenošenje kinetičke energije od jedne molekule na drugu. U krutim tijelima kondukcija je jedini način širenja topline kroz tijelo, a kod plinova i tekućina prisutne su i konvekcija i zračenje, kojima se prenosi znatno više topline nego kondukcijom [9]. Prijenos topline kondukcijom opisuje se toplinskom jednadžbom koja u općem obliku glasi [10]:

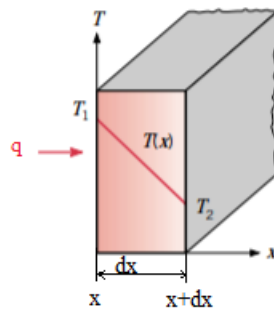
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \quad (6)$$

Ovo je osnovna parcijalna diferencijalna jednačnja koja modelira prijenos topline. Rezultat je temperatura  $T$  kao funkcija nezavisnih prostornih koordinata  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i vremena  $t$  nekog materijala. Konstanta  $\alpha$  je toplinska difuzivnost ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ),  $\lambda$  ( $\text{WK}^{-1}\text{m}^{-1}$ ) je koeficijent toplinske vodljivosti,  $\rho$  je gustoća materijala ( $\text{kgm}^{-3}$ ), a  $c_p$  je specifični toplinski kapacitet ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ).  $\nabla^2 T$  je Laplacian od temperature i u pravokutnim prostornim koordinatama  $x$ ,  $y$ ,  $z$  glasi:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Jednačnja je izvedena uz pretpostavu da je tijelo homogeno tj. da mu se gustoća i specifični toplinski kapacitet ne mijenju u prostoru, da je  $\lambda$  konstantan i da se prijelaz topline odvija u smjeru smanjenja temperature, proporcionalno gradijentu te temperature prema Fourierovom zakonu [10].



Slika 2. Shematski prikaz kondukcije topline kroz materijal [11]

Fourierov zakon opisuje stacionaran prijenos topline duž osi  $x$  jednodimenzijanskog tijela koji ima temperaturni gradijent  $\frac{dT}{dx}$  u tom smjeru (Slika 2.):

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (8)$$

$q$  ( $\text{Wm}^{-2}$ ) je gustoća toplinskog toka tj. brzina prijenosa topline u smjeru  $x$  kroz površinu tijela  $A$  ( $\text{m}^2$ ) okomitu na tu os. Obavezno je spomenuti da Fourierov zakon nije zakon u pravom smislu riječi, nego je analitički alat (generalizacija) koja opisuje brojne eksperimente i daje bitno svojstvo materijala  $\lambda$  prema kojem dijelimo materijale na dobre vodiče topline (npr. metali) i loše, zvane izolatorima (npr. staklena vuna) [11].

Ovisno o sustavu koji se promatra toplinska jednadžba se može pojednostaviti na jednodimenzijske (jedna nezavisna prostorna koordinata), dvodimenzijske ili na stacionarnu jednadžbu u kojoj nema ovisnosti temperature o vremenu. Rješenja uvelike ovise o rubnim uvjetima i često su prikazana u obliku sume članova beskonačnog reda. Analitička rješenja se mogu dobiti za samo neke rubne uvjete poput Dirlichtovih kod jednodimenzijske toplinske jednadžbe, dok se kod ostalih jednadžba mora rješavati numeričkim metodama.

## Konvekcija

Konvekcija ili prijenos topline miješanjem (vrtloženjem) je vrtložni mehanizam prijenosa topline. Karakterističan je za fluide pri čemu se pod konvektivnim prijenosom topline ne podrazumijeva samo izmjena u masi fluida nego i izmjena između fluida i čvrste površine. Gibanje fluida može biti uzrokovano lokalnim razlikama u temperaturi pa govorimo o prirodnoj konvekciji, ili vanjskim utjecajem (narinutom silom: ventilator, pumpa za miješanje itd.) pa govorimo o prisilnoj konvekciji [12].

Od većeg značaja je prijenos topline između fluida i čvrstog materijala koja se opisuje Fourierovim zakonom za stacionarni sloj fluida uz čvrstu površinu i Newtonovim zakonom hlađenja kako bi se dobio izraz:

$$q = h(T_s - T_f). \quad (9)$$

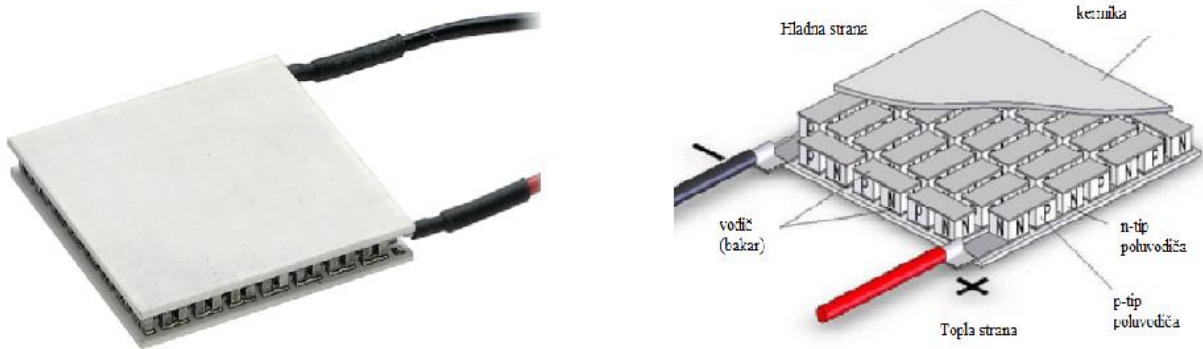
$q$  je gustoća toplinskog toka,  $T_s$  je temperatura površine materijala,  $T_f$  je temperatura fluida, a  $h$  ( $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ) konstanta prijelaza topline koja ovisi o mnoštvu fizičkih svojstva fluida i načinu strujanja. Vrijednost konstante  $h$  se određuje eksperimentalno pošto ne postoji teorija koja bi ga opisala.

## Radijacija

Toplinsko zračenje je direktna posljedica kretanja atoma i molekula sastavljenih od nabijenih čestica pri čemu gibanje rezultira elektromagnetskim zračenjem koje odvodi energiju od površine. Energija se prenosi elektromagnetskim valovima različitih valnih duljina, a poseban značaj imaju oni valovi koji se nakon apsorpcije drugog tijela (koje prima energiju) ponovno pretvaraju u toplinsku energiju [12].

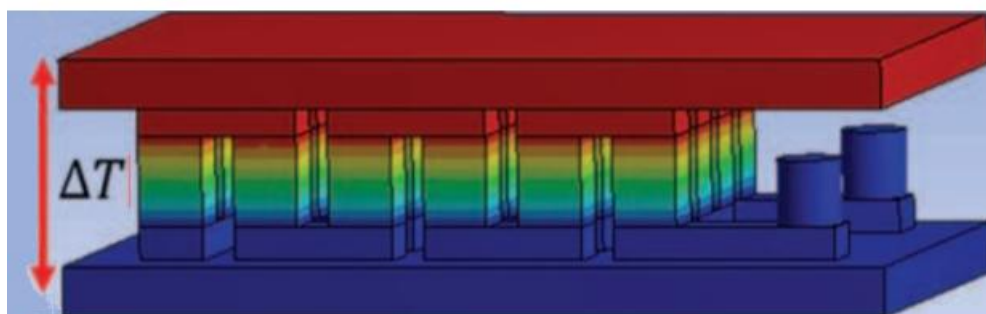
## Peltierov element

Peltierov element je termoelektrični uređaj koji se sastoji od dva različita poluvodiča poslagnana naizmjenice i povezana serijski između dvije keramičke pločice (Slika 3.).



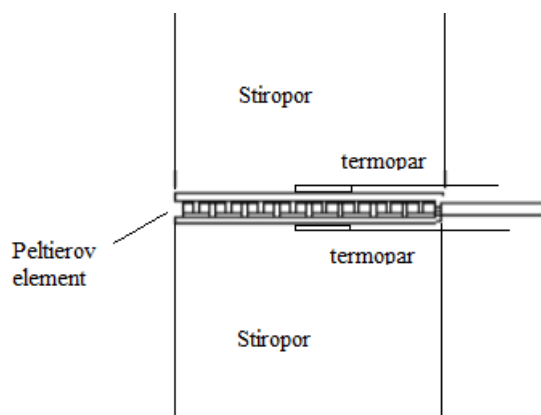
Slika 3. Izgleda Peltierova elementa i njegova shema [12, 13].

Glavni princip rada Peltierovog elementa je stvaranje električne energije ako ima vanjski izvor i ponor topline ili stvaranje temperaturne razlike na krajevima poluvodičkih elemenata ako njime teče struja. Zbog tih karakteristika on se može koristiti za hlađenje, najčešće mikroelektroničkih elemenata poput laserskih dioda i računalnih procesora, ali i proizvesti električnu energiju, ako postoji vanjski gradijent temperature (Slika 5.).



Slika 5. Temperaturni gradijent u Peltierovom elementu [15].

Cilj ovog rada je dati teorijski model koji bi opisao rad takvog uređaja, točnije promjenu temperatura na njegovim krajevima kada se nalazi između uzorka (Slika 6.).



Slika 6. Shematski prikaz sustava.

Za ovaj model potrebna je jednadžba za bilancu topline, ali i opis fenomenoloških pojava koje se događaju u Peltierovom elementu.

### Seebeckov efekt

Seebeckov efekt (termoelektrični efekt), pojava električnog napona u električnom strujnom krugu sastavljenom od dvaju različitih vodiča kada im se spojevi nalaze na različitim temperaturama. Omogućava izravno pretvaranje razlike temperatura u električnu struju. Tu je pojavu 1821. otkrio njemački fizičar Thomas Johann Seebeck (1770–1831) [16]. Dobivena struja se može izračunati prema sljedećoj jednadžbi:

$$U = (S_1 - S_2)\Delta T = S\Delta T \quad (10)$$

$U$  je napon na spoju u voltima (V),  $S$  je Seebeckov koeficijent ( $\text{V K}^{-1}$ ) i razlika je Seebeckovih koeficijenata pojedinačnih materijala,  $\Delta T$  je razlika temperatura materijala. Seebeckov koeficijent, osim o vrsti materijala ovisi i o temperaturi [17].

### Peltierov efekt

Peltierov efekt je pojava koju je otkrio 1834. francuski fizičar Peltier proučavajući spoj dvaju različitih vodiča u električnom krugu kojim teče struja. Uočio je da se na tom spoju apsorbira ili emitira toplina ovisno o smjeru struje. Jednadžba koja opisuje tu pojavu glasi:

$$Q = \pi I \quad (11)$$

$Q$  je toplina koja se oslobodi,  $I$  je jakost struje (A), a  $\pi$  je Peltierov koeficijent koji se može izračunati iz Seebackova [17]:

$$\pi = S * T. \quad (12)$$

### Jouelova toplina

Jouleova toplina nastaje pri prolasku električne struje kroz vodič zbog njegova otpora. Ona je proporcionalna kvadratu jakosti struje i električnom otporu materijala:

$$Q = I^2 * R \quad (13)$$

$R$  je električni otpor materijala izražen u ohmima ( $\Omega$ ) [17].

### Thompsonov efekt

Otkrio ga je Lord Kelvin 1851. proučavajući metalni vodič koji ima temperaturni gradijent svojom dužinom. Uočio je da se uz Joulovu toplinu stvara još jedan toplinski tok ako se kroz takav vodič pusti struja. Količina topline koja će se apsorbirati ili otpustiti ovisi o promjeni Seebackova koeficijenta duž vodiča uzrokovano tim temperaturnim gradijentom. Oslobodena toplina je mala i u ovom radu će se zanemariti [18].

### Kondukcija topline

Opisana Fourierovim zakonom (Jednadžba 8.), javlja se duž poluvodiča zbog razlike temperatura njihovih krajeva. Ovisi o dimenzijama Peltierova elementa i razlici temperatura.

### Bilanca topline

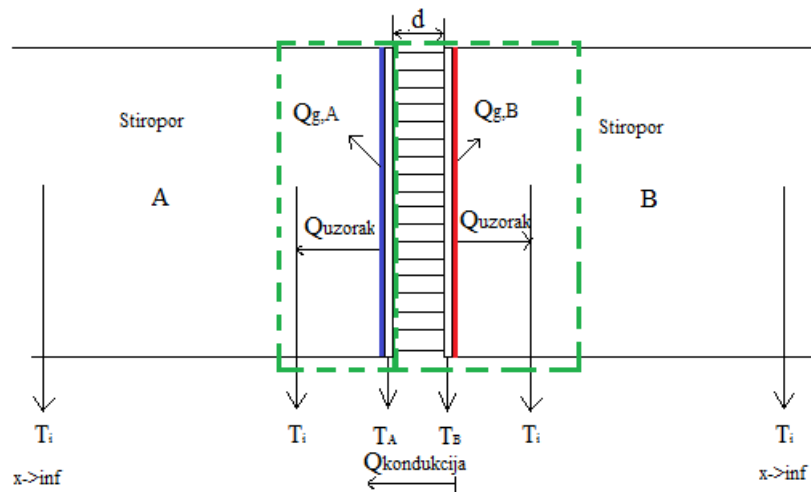
Bilanca topline proizlazi iz zakona očuvanje energije [11] i izgleda ovako:

$$Q_{ak} = Q_{ulaz} - Q_{izlaz} \pm Q_g. \quad (14)$$

$Q_{ak}$  je toplina koja se akumulira u sustavu,  $Q_{ulaz}$  je toplina koja ulazi u sustav kroz granicu,  $Q_{izlaz}$  je toplina koja izlazi iz sustava kroz granicu, a  $Q_g$  je toplina koja nastaje ili nestaje iz nekog drugog oblika energiju u sustavu.  $Q_g$  ne znači da se energija stvara ili troši u sustavu nego da neki drugi oblik energije prelazi u toplinu i obratno. Ukupan iznos energije ostaje isti.

## Matematički model Peltierova elementa između dva ista uzorka

Kao što je prethodno spomenuto, prvi korak u izradi modela je definiranje sustava (Slika 7.).



Slika 7. Shematski prikaz proučavanog sustava.

Prema gornjoj slici, sustav je podijeljen na dva dijela A i B. A dio obuhvaća keramičku pločicu Peltierova elementa zajedno s poluvodičima i uzorkom. B dio obuhvaća samo keramičku pločicu i uzorak. Traži se promjena temperature u vremenu na keramičkim pločicama A i B i utjecaj uzorka na tu temperaturu pri pobudi Peltierovog elementa istosmjernom strujom konstantne jakosti. A strana je ovdje hladnija tj. ona koja će se hladiti pod utjecajem Peltierova efekta, dok će se strana B grijati. Između sustava A i B postoji kondukcija kroz poluvodičke elemente iz smjera B prema A. Također postoji nestacionarni prijenos topline s keramičke pločice na uzorak, čiji će smjer ovisiti o trenutnoj temperaturi sustava. Ovaj je sustav dosta složen, pa su uzete brojne pretpostavke kako bi olakšale izračun. Pretpostavke su redom:

1. Gustoća, toplinski kapaciteti, Seebackovi koeficijenti, konstante toplinske vodljivosti i otpori se *ne mijenjaju* sa temperaturom niti položajem.
2. Prijelaz topline odvija se samo u *jednoj* prostornoj dimenziji.
3. Uzorak je *polubeskonačan*, a njegova početna temperatura je jednaka početnoj temperaturi,  $T_i$ .
4. Između Peltierova elementa i uzorka postoji savršen kontakt.

Iz toga možemo paralelno napisati bilance topline za sustave A i B.

$$Q_{A,ak} = Q_{A,ulaz} - Q_{A,izlaz} + Q_{A,g} \quad (15)$$



$$Q_{B,ak} = Q_{B,ulaz} - Q_{B,izlaz} + Q_{B,g}. \quad (16)$$

Ako uvrstimo poznate izraze za akumulaciju topline (Jednadžba 2.), prijelaz topline (Jednadžba 8.) i generaciju (Jednadžbe 11, 12, 13) dobije se:

$$c_A m_A \frac{dT_A}{dt} = \lambda * A \frac{(T_B - T_A)}{\Delta x} - Q_{A,uzorak} - SNIT_A \quad (17)$$

$$c_B m_B \frac{dT_B}{dt} = -\lambda * A \frac{(T_B - T_A)}{\Delta x} - Q_{B,uzorak} + SNIT_B + I^2 R \quad (18)$$

U gornjim jednadžbama  $A$  je površina uzorka ( $m^2$ ),  $\Delta x$  duljina poluvodiča,  $N$  broj poluvodičkih elemenata i  $Q_{uzorak}$  je toplina odvedena u uzorak.

Uzorak se idealizira kao polubeskonačno tijelo, koje ima jednu ravnu površinu dok mu se druge dimenzije prostiru u beskonačnost, u ovom slučaju samo jedna prostorna dimenzija  $x$ . Kod takvog tijela raspodjela temperatura u nekom vremenu  $t$  će ovisiti o njihovoj početnoj raspodjeli i toplinskim uvjetima na toj površini. Prijenos topline duž takvog tijela opisuje se jednadžbom [11]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Ova parcijalna diferencijalna jednadžba ima analitička rješenja samo za neke granične i početne uvjete. Kao početni uvjet često se uzima konstantna temperatura duž osi, dok se za granični uvjet na površini, uzima konstantna temperatura  $T_s$ , konstantan toplinski fluks  $q_s$ , ili konvekcijski prijenos topline, a za granični uvjet na beskonačnoj strani uzima se početna temperatura. Napisano jednadžbama, izrazi za konstantnu temperaturu površine su:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (20)$$

$$T(0, t) = T_s \quad i \quad T(x \rightarrow \infty, t) = T_i, \quad (21)$$

$$T(x, 0) = T_i. \quad (22)$$

$T_i$  je početna temperatura, jednadžbe 21. su granični uvjeti pri  $x=0$  i  $x \rightarrow \infty$ . Analitičko rješenje za toplinski fluks kroz tu površinu je [11]:

$$q_s = \frac{\lambda(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}. \quad (23)$$

Pri savršenom dodiru dva polubeskonačna tijela različitih temperatura, temperatura na kontaknoj površini će odmah poprimiti vrijednost  $T_s$  koja će biti između početnih temperatura tih tijela. Ako su ta dva tijela različitih svojstava,  $T_s$  se može izračunati iz prethodne jednadžbe pošto se ta temperatura neće mijenjati sa vremenom. Izraz za temperaturu će biti:

$$T_s = \frac{e_1 T_1 + e_2 T_2}{e_1 + e_2}, \quad (24)$$

$T_1$  predstavlja temperaturu jednog tijela,  $T_2$  temperaturu drugog, a  $e_1$  i  $e_2$  ( $\text{Ws}^{1/2}\text{m}^{-2}\text{K}^{-1}$ ) njihove efuzivnosti definirane izrazom:

$$e = \sqrt{k\rho c_p}. \quad (25)$$

Iz jednadžbe 24. se vidi da će temperatura  $T_s$  biti bliže temperaturi materijala sa većom efuzivnosti. Također, potrebno je napomenuti da efuzivnost nije 'novo' svojstvo materijala, jer je potpuno određeno toplinskom vodljivošću i volumnim toplinskim kapacitetom.

Primjenjujući prethodna znanja može se definirati količina topline koja odlazi u uzorak. Ako pretpostavimo da je uzorak toplinski izolator male efuzivnosti, onda će temperatura na kontaktu između Peltierovog elementa i njega ( $T_s$ ) biti približno jednaka  $T_A$  na strani A i  $T_B$  na strani B, a temperatura uzorka biti približno jednaka početnoj. Uzimajući u obzir vrijeme kod toplinskog toka dobiju se izrazi:

$$Q_{A,uzorak} = \frac{A * \lambda_{uzorak} * \sqrt{t}(T_A - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha}}. \quad (26)$$

$$Q_{B,uzorak} = \frac{A * \lambda_{uzorak} * \sqrt{t}(T_B - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha}}. \quad (27)$$

Konačni izrazi su:

$$c_A m_A \frac{dT_A}{dt} = \lambda * A \frac{(T_B - T_A)}{\Delta x} - \frac{A * \lambda_{uzorak} (T_A - T_i)\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\alpha}} - SNIT_A, \quad (28)$$

$$c_B m_B \frac{dT_B}{dt} = -\lambda * A \frac{(T_B - T_A)}{\Delta x} - \frac{A * \lambda_{uzorak} (T_B - T_i)\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\alpha}} + SNIT_B + I^2 R. \quad (29)$$

Dobiven je sustav od dvije obične diferencijalne jednačbe s jednom nezavisnom varijablom  $t$ . Ovaj sustav se rješava primjenom jednih od postojećih numeričkih metoda od kojih je u ovom radu odabrana metoda *Runge-Kutta IV*.

## EKSPERIMENTALNI DIO

Ekperiment je rađen sa Peltierovim elementom sljedećih karakteristika [19, 20]:

$$m = 0.02 \text{ kg}$$

$$\text{dužina: širina: debljina} = 40:40:4 \text{ mm}$$

$$R = 2.2 \Omega$$

$$N = 127$$

$$S = S_p - S_n = (185 - (-230)) * \frac{10^{-6}V}{K} = 415 * \frac{10^{-6}V}{K}$$

$$\lambda = 1,2 \frac{W}{mK}$$

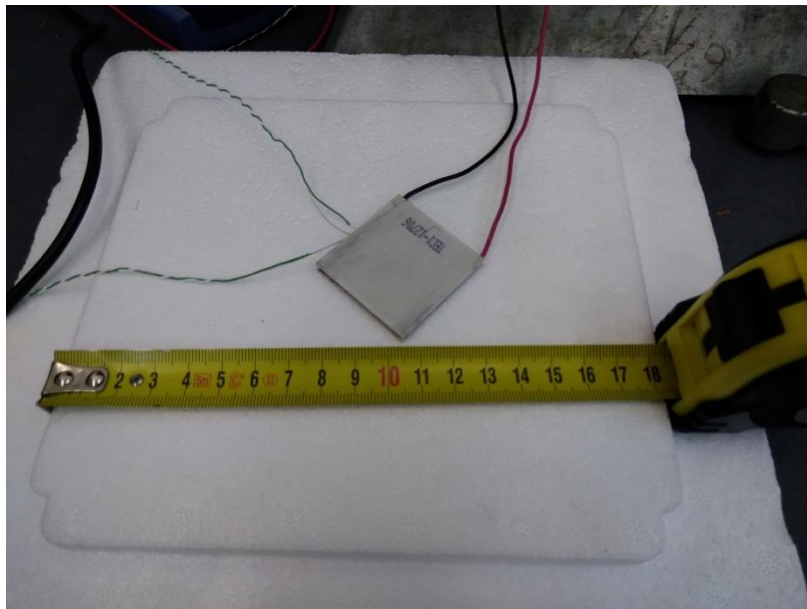
Na oba kraja Peltierova elementa stavljen je uzorak stiropora za kojeg su uzete sljedeće vrijednosti [19]:

$$\rho = 30 \frac{kg}{m^3}$$

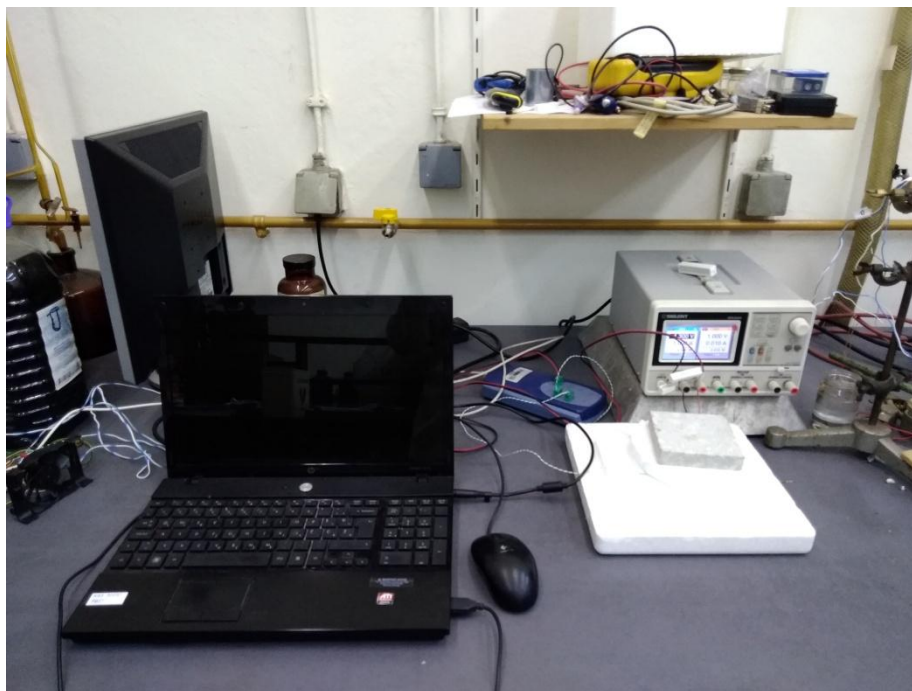
$$\lambda = 0.035 \frac{W}{mK}$$

$$c_p = 1450 \frac{J}{kgK}$$

Na sljedećim slikama prikazana je aparatura kojom su izvršena mjerenja:



Slika 8. Prikaz Peltierova elementa na uzorku od stiropora zajedno sa dva termopara



Slika 9. Prikaz aparature za mjerenje

### **Način ispitivanja**

Eksperiment se provodi tako da se očita početna temperatura pomoću dva termopara, smještena na oba kraja Peltierova elementa, između površine Peltierova elementa i površine uzorka. Nakon što se ona izmjeri, Peltierovim elementom se pusti struja konstantne jakosti i mjeri se promjena temperature u vremenu. Nakon određenog vremena ugasi se izvor struje i nastavi se pratiti promjena temperature sve dok se ona ne ustali. Kao rezultat dobije se graf ovisnosti temperature keramičke površine Peltierova elementa tijekom vremena, koji služi za provjeru ispravnosti teorijskog modela. Provedeno je sedam mjerenja u kojima se mijenjala samo jakost struje u rasponu od 0,05 A do 1 A.

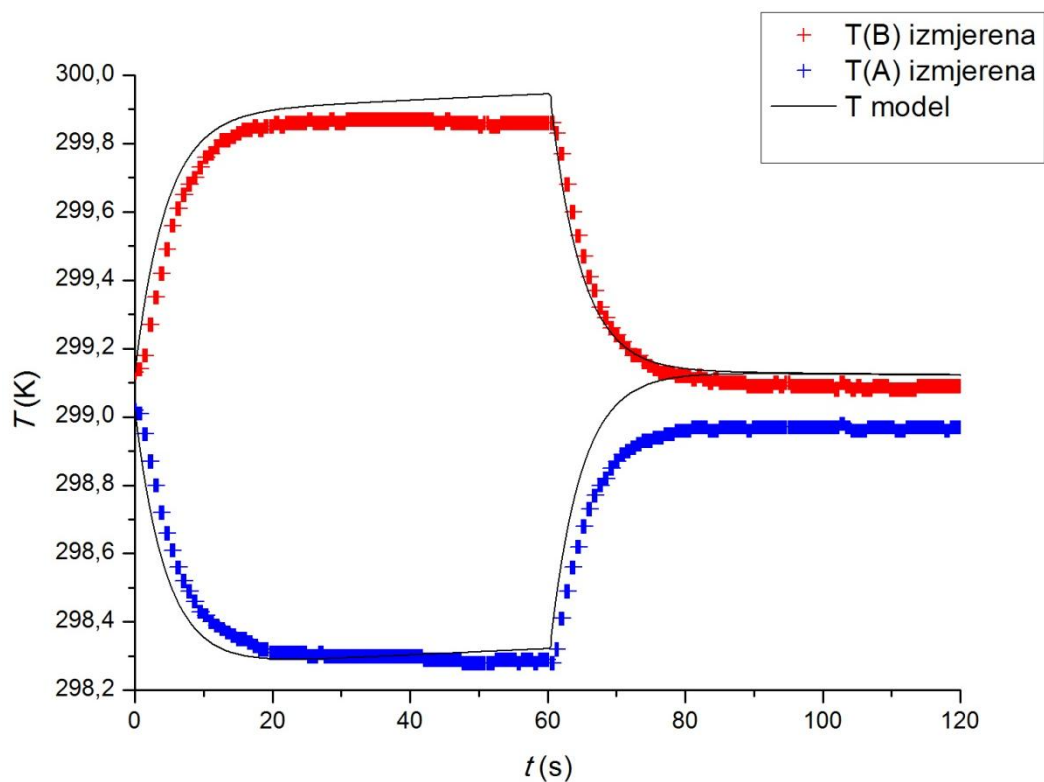
### **Proračun**

Sustav diferencijalnih jednadžbi riješio se pomoću programskog paketa *Matlab* bez korištenja *solvera* i integriranih funkcija kako bi se mogao proizvoljno odabrati vremenski korak proračuna. Cijeli program dostupan je u prilogu.

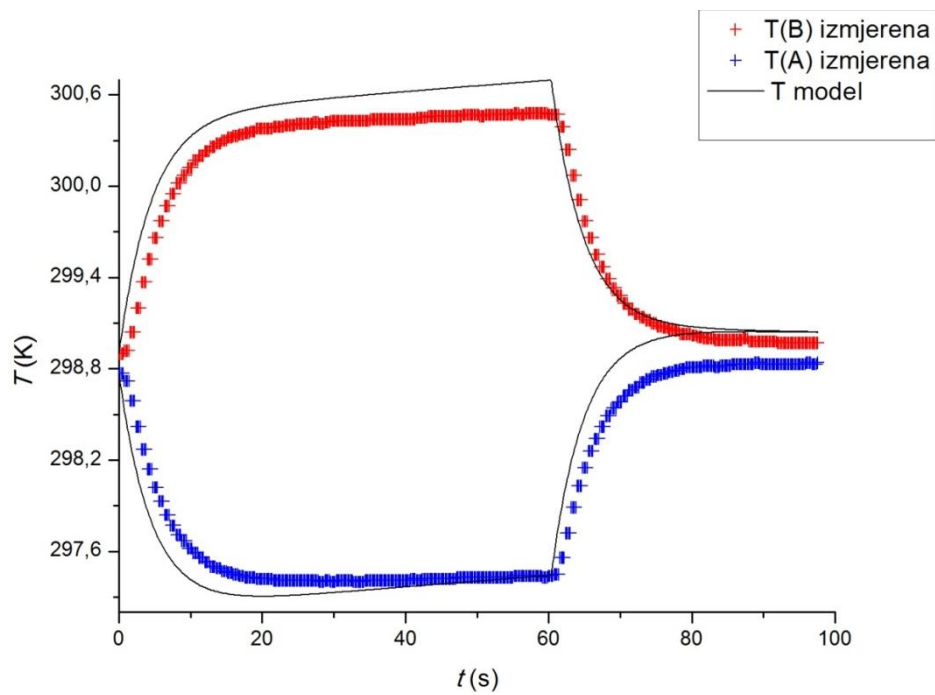
## REZULTATI

Prikazani rezultati mjerenja i simulacije podijeljeni su u dva dijela. Prvi dio rezultata sadrži grafove za uporabljene konstante materijala (u simulaciji) navedene u eksperimentalnom dijelu, dok je u drugom dijelu odabran jedan rezultat eksperimenta koji se uspoređuje sa rezultatom simulacije uz promjenu konstanti materijala, kako bi se uočio njihov utjecaj na rezultat simulacije.

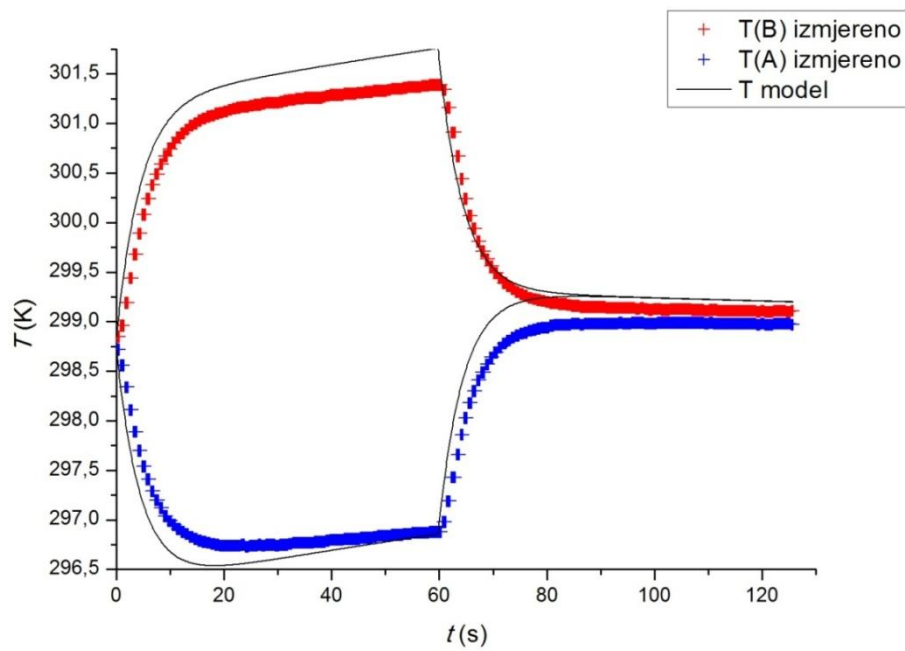
Rezultati sa konstantnim svojstvima pri različitim jakostima struja.



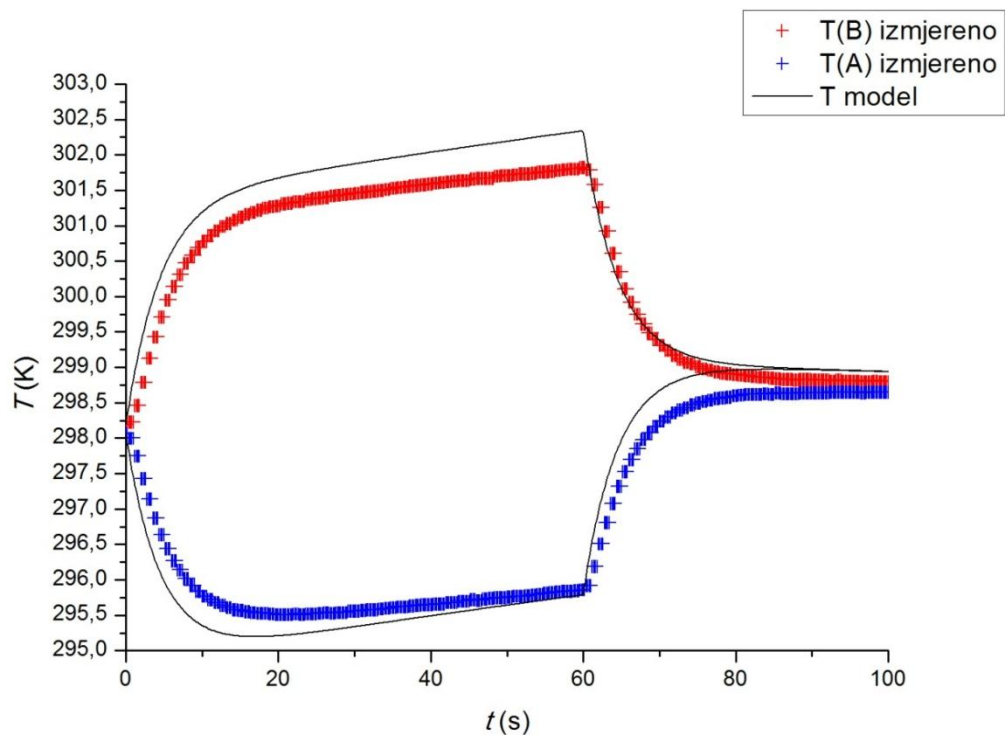
Slika 10. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.05 A



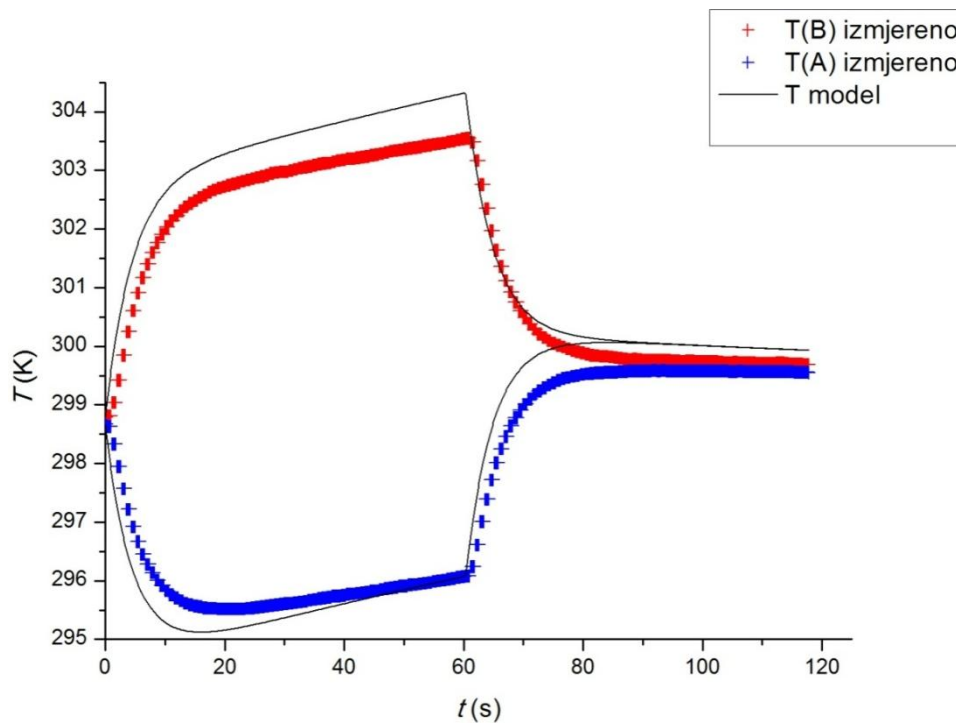
Slika 11. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.1 A



Slika 12. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.15 A

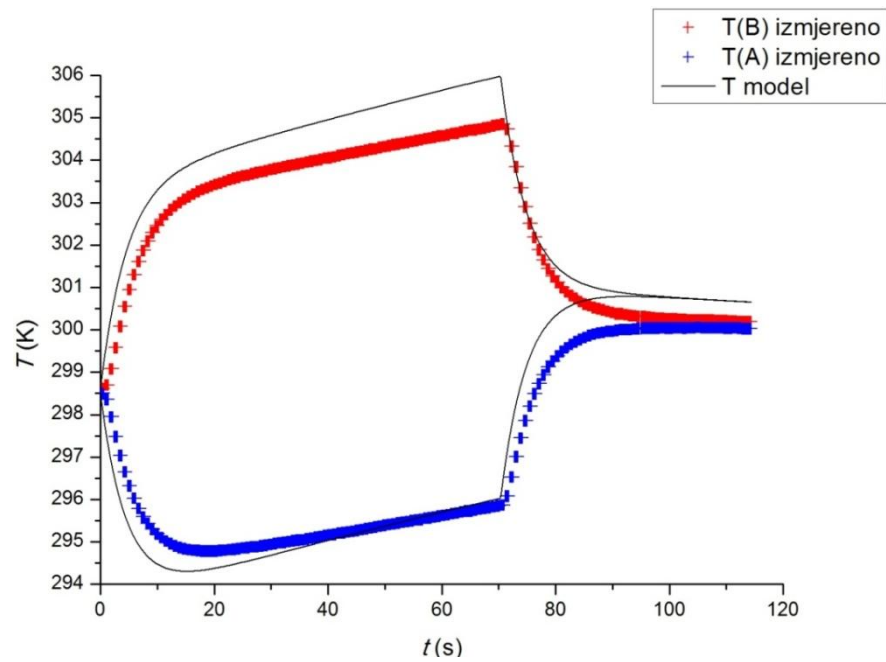


Slika 13. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.2 A

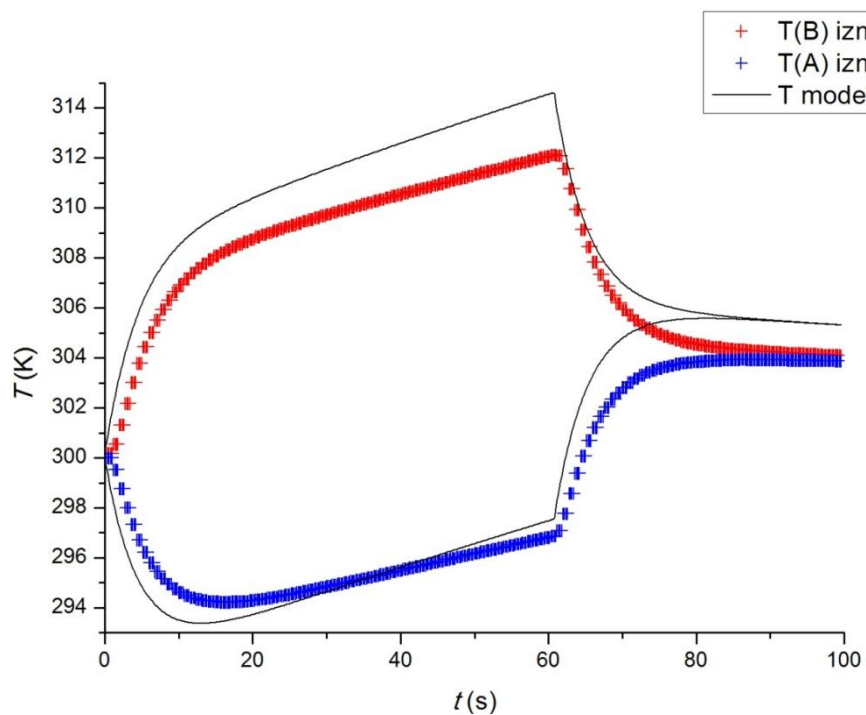


Slika 14. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.25 A

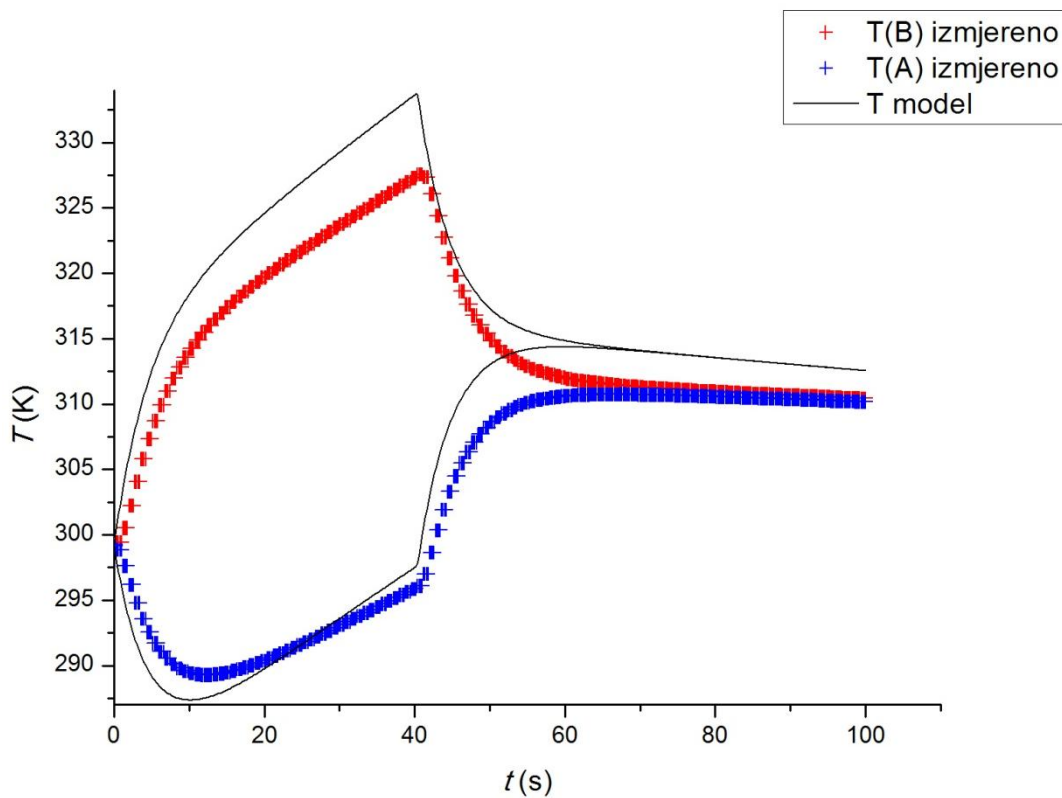




Slika 15. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.3 A

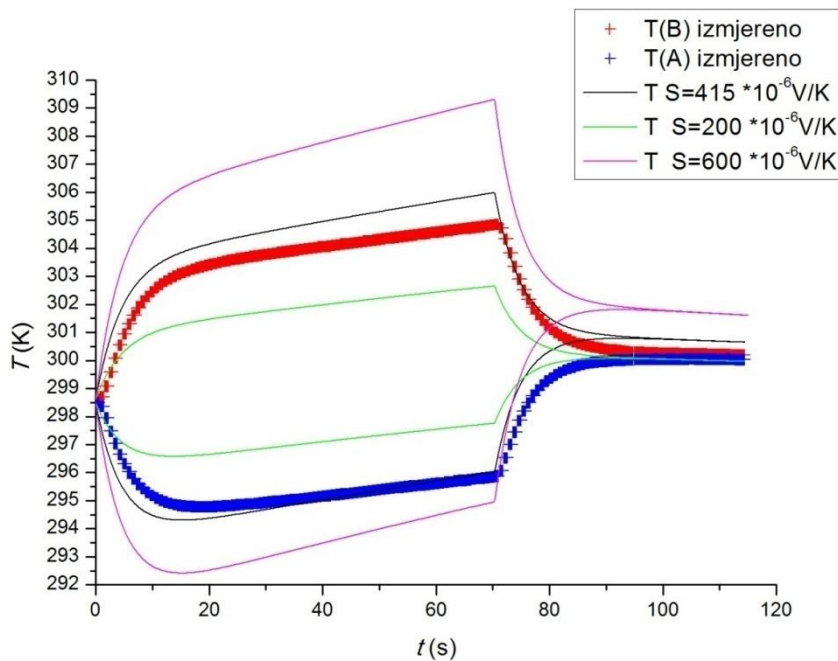


Slika 16. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.5 A

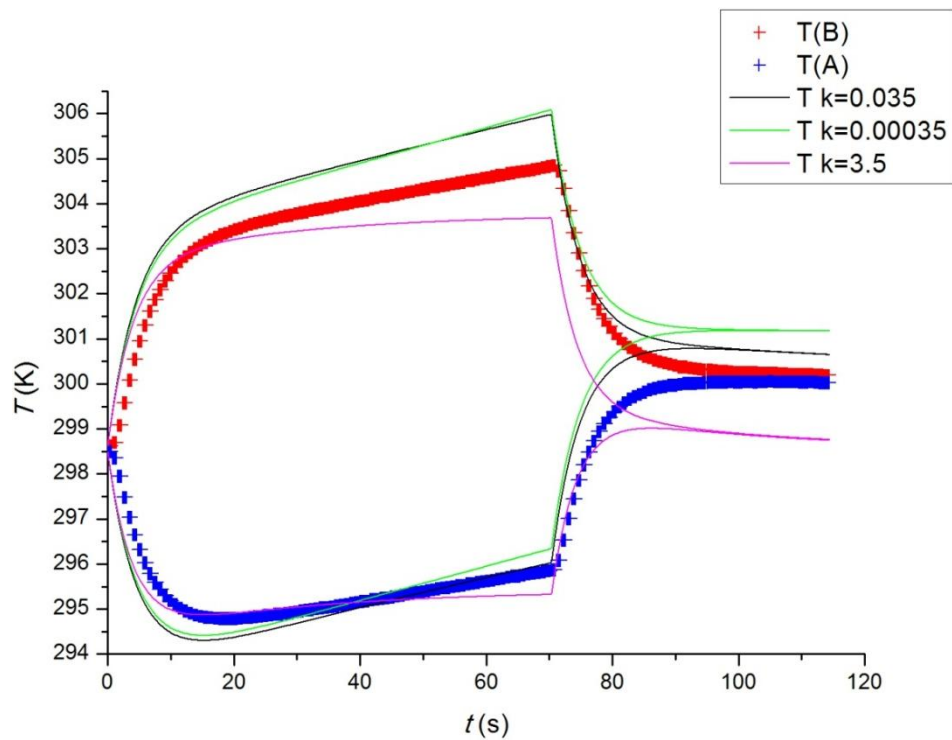


Slika 17. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 1 A

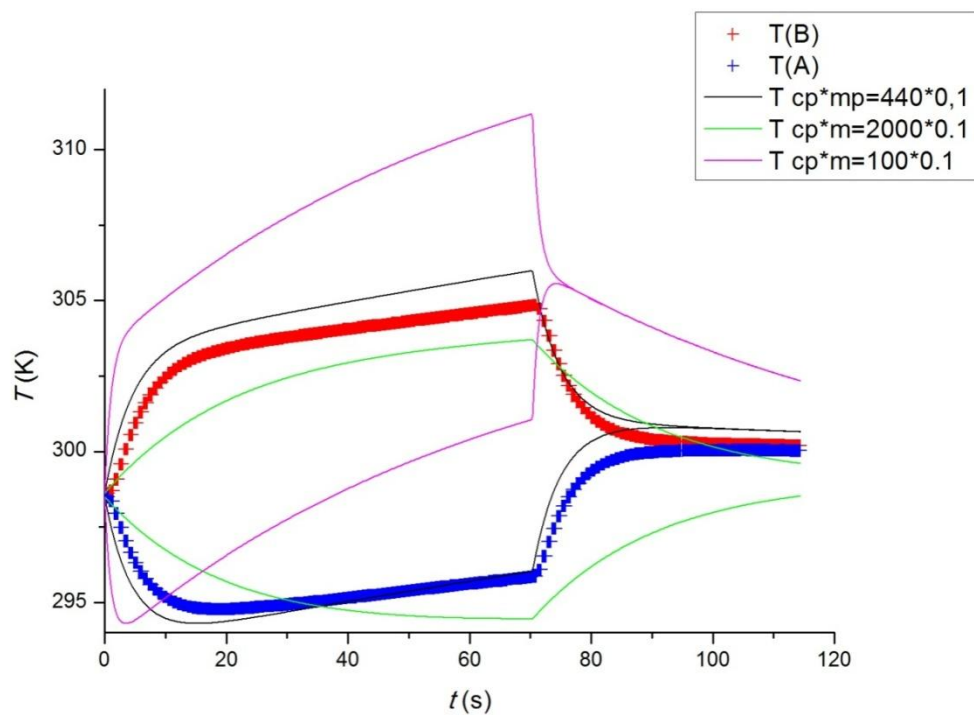
**Drugi dio rezultata;** utjecaj konstanti modela na rezultate simulacije za  $I=0.3$  A.



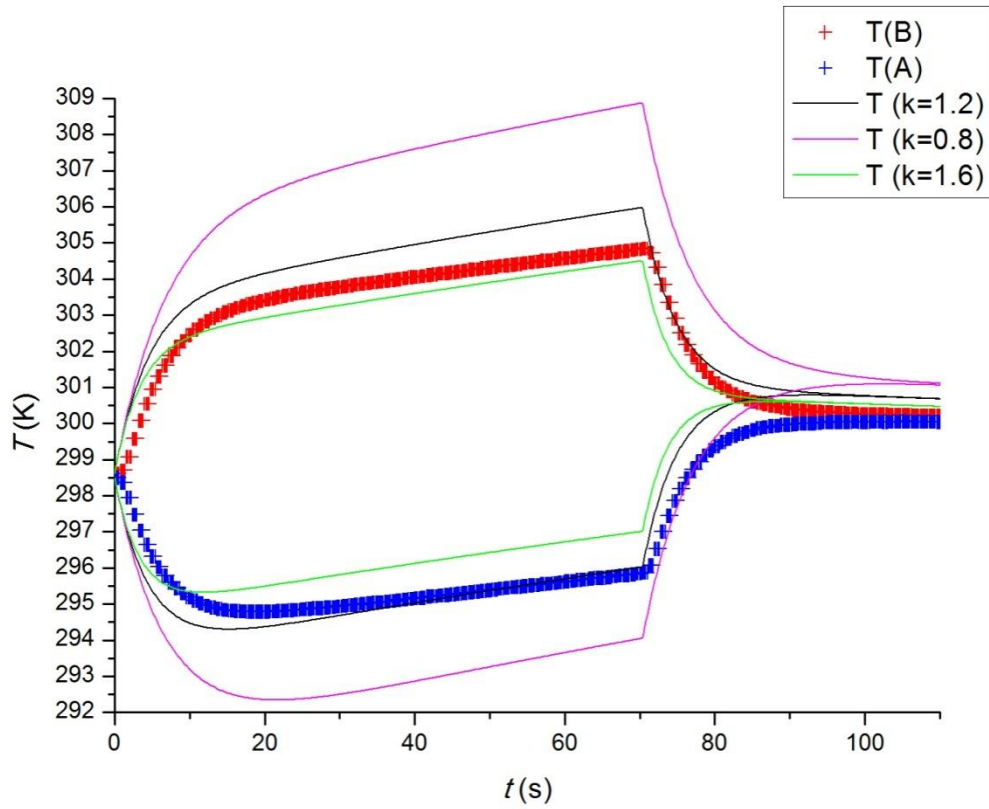
Slika 18. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.3 A i pri različitim Seebackovim koeficijentima.



Slika 19. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.3 A i pri različitim koeficijentima toplinske vodljivosti uzorka.



Slika 20. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.3 A i pri različitim toplinskim kapacitetima.



Slika 21. Ovisnost eksperimentalno izmjerene temperature i modelom izračunate temperature o vremenu za struju jakosti 0.3 A i pri različitim koeficijentima toplinske vodljivosti poluvodičkog materijala.

## RASPRAVA

Iz prvog dijela dobivenih rezultata vidi se dobro kvalitativno podudaranje rješenja dobivenih modelom (jednadžbe 28 i 29) i eksperimentalnih podataka. Topla strana se naglo zagrijava, dok se hladna isto tako hladi sve do pojave određene temperaturne razlike nakon čega brzina zagrijavanja tople strane opadne, a hladnija se počne grijati. Ta temperaturna razlika se održava daljnjim radom Peltierova elementa sve dok se struja ne isključi, nakon čega se temperatura hladne i tople strane izjednačavaju kondukcijom kroz uređaj i naposljetku s okolinom.

U drugom dijelu prikazana je ovisnost rezultata (temperatura) određenih rješavanjem modela o njegovim parametrima. Vidi se da je Seebeckov koeficijent jako bitan pošto male razlike uvelike utječu na maksimalnu temperaturnu razliku Peltierove pločice. Koliko će Peltier dobro hladiti ili grijati prvenstveno će ovisiti o Seebeckovom koeficijentu poluvodičkog materijala.

Na maksimalnu temperaturnu razliku slično utječe i koeficijent toplinske vodljivosti poluvodiča u Peltieru. Ako se koeficijent toplinske vodljivosti poveća, uočava se manja temperaturnarazlika tj. što je veća toplinska vodljivost to će hladna strana primiti više topline od tople strane Peltierovog elementa i time lošije hladiti.

Smanjenje koeficijenta toplinske vodljivosti uzorka nema velikog značaja na rezultat pošto je on već nizak. Povećanjem toplinske vodljivosti uzorka uočava se da je on ipak bitan za nagib krivulje (tijek temperature) nakon što se postigne određena razlika u temperaturama. Što je koeficijent toplinske vodljivosti uzorka veći to će se više energije primiti iz uzorka kod hladne strane ili predati u uzorak kod tople strane Peltierovog elementa.

Toplinski kapacitet ne utječe na maksimalnu temperaturnu razliku, ali utječe na brzinu njenog postizanja (dinamiku procesa). Pri većim toplinskim kapacitetima temperatura oba kraja će se sporije mijenjati, a smanjenjem brže, zbog manje potrebe za toplinom.

Ovaj model ipak pokazuje odstupanje od eksperimentalnih vrijednosti. Glavni razlog tome su loše određeni parametri čija se vrijednost nije provjeravala eksperimentalno nego su nađene vrijednosti uzete kao takve iz dostupnih literaturnih izvora.

Odstupanje se također može pripisati nedostacima modela. Napravljeno je puno pojednostavljenja koje bitno utječu na konačno rješenje. Kontakt između Peltiera i uzorka nije savršen i trebao bi se izračunati koeficijent kontaktnog otpora što predstavlja veliki problem i pri eksperimentalnim mjerenjima, ponajprije zbog teškog određivanja stvarne kontaktne površine.

Nadalje, sam izraz za toplinu odvedenu u uzorak je previše pojednostavljen. Temperatura kontakta, iako blizu temperaturi Peltiera, neće biti njoj jednaka. Isto tako temperatura u uzorku nije konstantna i mijenjat će se s položajem i vremenom. Rješavanje te jednadžbe je izuzetno teško jer su granični uvjeti zavisni o vremenu. Analitička rješenja su dana za nestacionaran prijenos pri konstantnoj temperaturi kontakta ili konstantnom protoku. Ostali slučajevi se moraju rješavati numerički i s time dolazi određena greška metode i kompliciran proračun pa je primijenjena pojednostavljena pretpostavka opisana jednadžbama (26) i (27). Jedno od mogućih rješenja je određivanje konstantnog toka, koji se postigne

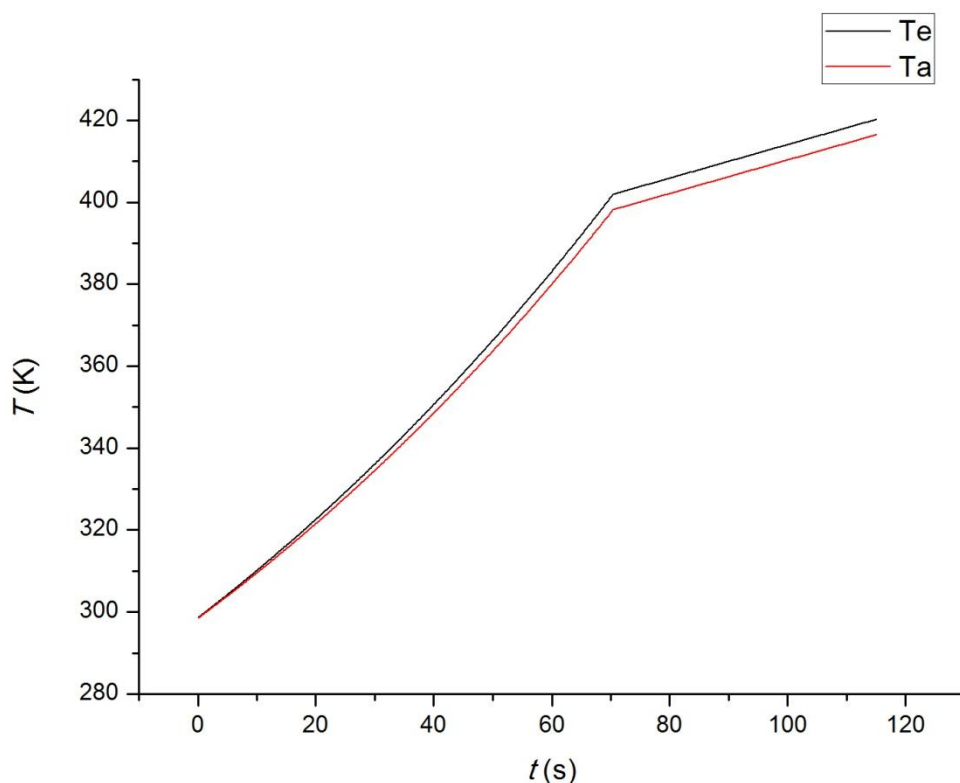
nakon maksimalne temperaturne razlike budući da je nakon toga, rast temperature linearan u nekim slučajevima.

Podjela Peltierova elementa na dva dijela koji se sastoji od jedna keramičke pločice i drugog dijela koji se sastoji od poluvodičkih elemenata i druge pločice je jedinstven u usporedbi s drugim radovima. Prema literaturi toplinske bilance su [17]:

$$Q_a = \frac{\Delta T}{\theta_m} + SNIT_a - \frac{I^2 R}{2}, \quad (30)$$

$$Q_e = \frac{\Delta T}{\theta_m} + SNIT_e + \frac{I^2 R}{2}. \quad (31)$$

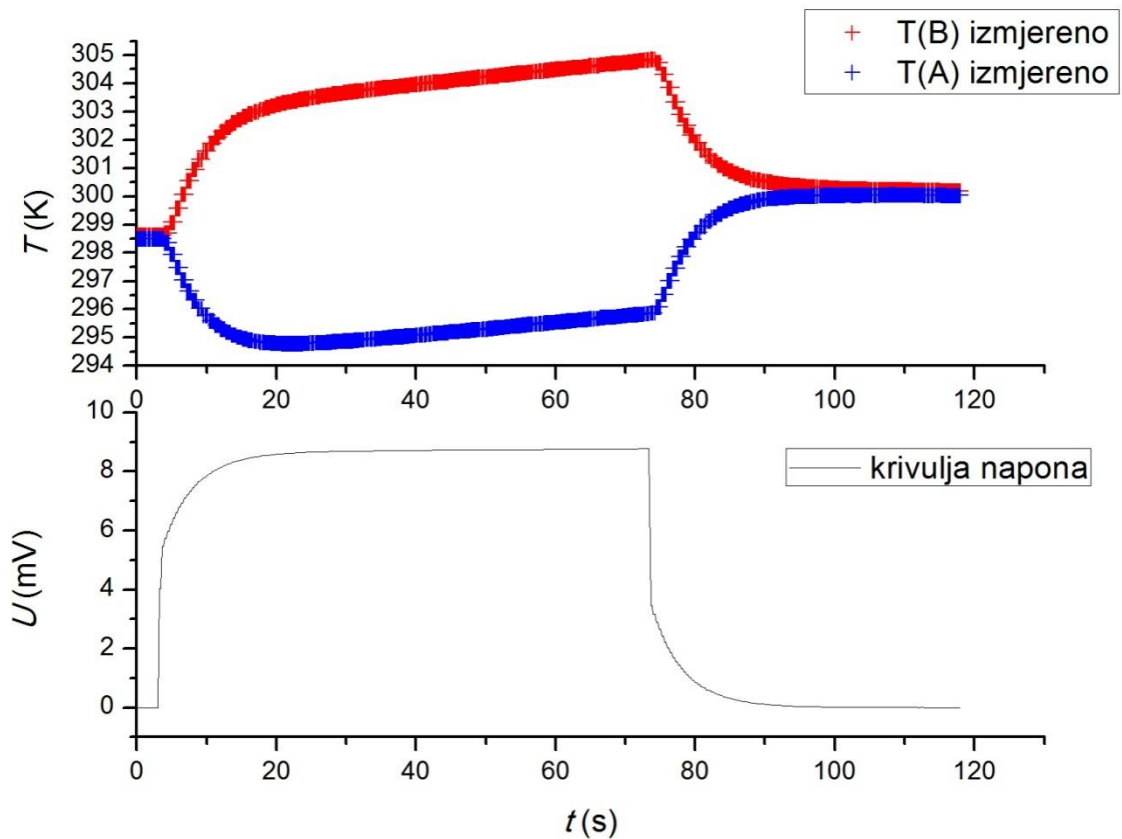
$Q_a$  je apsorbirana toplina, analogno sa  $Q_A$ ,  $\frac{\Delta T}{\theta_m}$  je izraz za kondukciju kroz Peltierov element,  $SNIT_a$  toplina nastala Peltierovim efektom, a  $\frac{I^2 R}{2}$  je pola Jouelove topline. Ako se navedeni izrazi uzmu u gore navedenom obliku i računa se promjena temperature dobije se rezultat prikazan na Slici 20.



Slika 22. Prikaz rješenja za model prema jednadžbama 30 i 31

Vidi se odmah da oni ni približno ne opisuju pravo toplinsko stanje u Peltierovom elementu. No, ove jednadžbe nisu korištene za direktno računanje temperature, nego za dobivanje modela ekvivalentnog električnog kruga [17]. Takav model iz napona i osnovnih

karakteristika Peltierova elementa, računa temperature na krajevima. Graf pobude (napon u ovisnosti o vremenu) i odziva (promjena temperatura) je prikazan na slici 23.



Slika 23. Prikaz pobude napona o vremenu i njegova odziva u temperaturi Peltiera

Iz njega se vidi da napon ne dostigne odmah svoju vrijednost nego da postoji prijelaz koji uzrokuje slabije grijanje tj. hlađenje na početku i jače grijanje na kraju. Napon se jako lagano mjeri i ako bi se mogao dobiti dobar model ekvivalentnog električnog kruga koji bi iz napona vraćao temperature Peltiera i uz dobar opis prijenosa topline u uzorak, moglo bi se izračunati neko toplinsko svojstvo uzorka, jako brzo i jako jeftino.

## ZAKLJUČAK

U ovom radu dana je teorijska osnova potrebna za razumijevanje termoelektričnih pojava u Peltierovom elementu. Korištenjem tih znanja izveden je teorijski model koji dobro opisuje vrijednosti temperatura dobivenih mjerenjima. On se može podesiti za procjenjivanje toplinske vodljivosti uzorka ako su dobro određene karakteristike Peltierova elementa i ako su poznate temperature na njegovim krajevima.

Za određivanje temperature se koristio termopar, no moguće je i procijeniti te temperature korištenjem drugih modela, posebice modela ekvivalentnog kruga[16], koji računa promjenu temperatura na Peltierovom elementu iz napona.

Ukoliko bi taj model bio dobar, toplinska vodljivost nekog uzorka bi se mogla jako brzo i jeftino odrediti.



## LITERATURA

1. Zukić, Š., Izrada i baždarenje aparature za određivanje toplinskih svojstava materijala, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilište u Zagrebu, 2015.
2. Cengel, A. Y., Boles, A. M., Thermodynamics: An Engineering Approach, 5th ed., McGraw Hill, 2006.
3. Budin, R., Mihelić-Bogdanić, A., Osnove tehničke termodinamike, drugo izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2001., str.XII, 4,
4. Zakon očuvanja energije, Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, [www.enciklopedija.hr](http://www.enciklopedija.hr), (pristup 24. rujna 2018.)
5. Temperatura, Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, [www.enciklopedija.hr](http://www.enciklopedija.hr), (pristup 24. rujna 2018.)
6. Termodinamika, Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, [www.enciklopedija.hr](http://www.enciklopedija.hr), (pristup 24. rujna 2018.)
7. Apsolutna nula temperature, Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, [www.enciklopedija.hr](http://www.enciklopedija.hr), (pristup 24. rujna 2018.)
8. Toplina (količina topline), Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, [www.enciklopedija.hr](http://www.enciklopedija.hr), (pristup 24. rujna 2018.)
9. Vođenje (kondukcija), Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, [www.enciklopedija.hr](http://www.enciklopedija.hr), (pristup 24. rujna 2018.)
10. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, 10th edition, John Wiley & Sons, 2011., str. 557
11. Incropera, F. P., et al., Fundamentals of heat and mass transfer, 6th edition, John Wiley & Sons, 2007.
12. Glasnović, A., Sander, A., Prijenos tvari i energije, Interna skripta, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilište u Zagrebu, 2010.
13. <https://www.distrelec.de/en/peltier-element-laird-cp14-127-06l/p/17566093>, (pristup 24. rujna 2018.)
14. <https://electronics.stackexchange.com/questions/177046/flexing-peltier-plate-physical-question>, (pristup 24. rujna 2018.)

15. Eurydice, K., Zhiting, T., Modeling of a Thermoelectric Generator Device, Thermoelectrics for Power Generation Sergey Skipidarov and Mikhail Nikitin, IntechOpen, 2016.
16. Seebeckov efekt, Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, [www.enciklopedija.hr](http://www.enciklopedija.hr), (pristup 24. rujna 2018.)
17. Lineykin, S., Ben-Yaakov, S., Modeling and Analysis of Thermoelectric Modules, Ben-Gurion University of the Negev, 2005.
18. Thomson effect, Encyclopaedia Britannica, <https://www.britannica.com>, (pristup 24. rujna 2018.)
19. <http://peltiermodules.com/peltier.datasheet/TEC1-12705.pdf>, (pristup 24. rujna 2018.)
20. [http://www.everredtronics.com/thermoelectric\\_materials.html](http://www.everredtronics.com/thermoelectric_materials.html), (pristup 24. rujna 2018.)

## POPIS OZNAKA I MJERNIH JEDINICA

Oznaka	Mjerna jedinica	Fizikalna veličina
$\alpha$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	toplinska difuzivnost
$\lambda$	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	koeficijent toplinske vodljivosti
$\pi$	$\text{VK}^{-1}$	Peltierov koeficijent
$\rho$	$\text{kgm}^{-3}$	gustoća
$\Phi$	$\text{Js}^{-1}$	toplinski tok
$c$	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	specifični toplinski kapacitet
$E$	$\text{J}$	energija
$e$	$\text{Ws}^{1/2}\text{m}^{-2}\text{K}^{-1}$	efuzivnost
$h$	$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$	koeficijent prijenosa topline
$I$	$\text{A}$	struja
$m$	$\text{kg}$	masa
$p$	$\text{Pa}$	tlak
$Q$	$\text{J}$	toplina
$q$	$\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$	toplinski fluks
$R$	$\Omega$	električni otpor
$S$	$\text{VK}^{-1}$	Seebeckov koeficijent
$T$	$\text{K}$	temperatura
$t$	$\text{s}$	vrijeme
$U$	$\text{V}$	napon
$v$	$\text{m}^3$	volumen

## PRILOG

Program za rješavanje modela

```
clc
clear all
close all

global x S R Cp N k a A dt tI T0 d

%Parametri
A=0.04*0.04;           %Površina m^2
d=0.004;              %Debljina m^2
x=1.2;                %Toplinska vodljivost poluvodiča
W/mK
S=415*10^(-6);       %Seeback V/K
N=127;                %broj poluvodičkih stupova
R=2.2;                %Otpor ohm
Cp=440*0.01;         %Toplinski kapacitet Peltier *
masa
k=0.035;              %Toplinska vodljivost uzorka W/mK
ro=30;                %Gustoca uzorka kg/m3
cp=1450;              %Toplinski kapacitet uzorka J/kgK
a=k/ro/cp;           %Toplinska difuzivnost uzorka

dt=0.2;                %vremenski korak
tend=115;              %konacno vrijeme
tI=70.4;              %vrijeme prekida struje
tspan = (0:dt:tend);  %vremenski vektor

T0 = [298.62    298.5
];                %pocetni uvjeti

T = ode4(@odefun,tspan,T0); %RK4 metoda

plot(tspan,T(:,1),'r',tspan,T(:,2),'b')
```

## Funkcije koje se pozivaju u programu

```
function dTdt = odefun(t,T)
global x S R Cp N k a A tI T0 dt d
dTdt = zeros(2,1);
if t<tI
    I=0.3;           %Struja - od tpoc do tI (vrijeme
prekida)
else
    I=0;
end
%                               toplina odvedena u
uzorak
%                               q=A*k*(T2-
T1)/(pi*dif*dt)^(1/2)
    dTdt(1) = (-x*A/d*(T(1)-T(2)) -
A*k*dt^(1/2)*(T(1)-T0(1))/(3.14*a)^(1/2) + S*N*I*T(1) +
(I^(2)*R))/Cp;
    dTdt(2) = (x*A/d*(T(1)-T(2)) -
A*k*dt^(1/2)*(T(2)-T0(2))/(3.14*a)^(1/2) - S*N*I*T(2)
)/Cp;
end
```

```
function Y = ode4(odefun,tspan,y0,varargin)
```

```
h = diff(tspan);
```

```
f0 = feval(odefun,tspan(1),y0,varargin{:});
```

```
y0 = y0(:);
```

```
neq = length(y0);
```

```
N = length(tspan);
```

```
Y = zeros(neq,N);
```

```
F = zeros(neq,4);
```

```
Y(:,1) = y0;
```

```
for i = 2:N
```

```
    ti = tspan(i-1);
```

```
    hi = h(i-1);
```

```
    yi = Y(:,i-1);
```

```

    F(:,1) = feval(odefun,ti,yi,varargin{:});
    F(:,2) =
feval(odefun,ti+0.5*hi,yi+0.5*hi*F(:,1),varargin{:});
    F(:,3) =
feval(odefun,ti+0.5*hi,yi+0.5*hi*F(:,2),varargin{:});
    F(:,4) =
feval(odefun,tspan(i),yi+hi*F(:,3),varargin{:});
    Y(:,i) = yi + (hi/6)*(F(:,1) + 2*F(:,2) + 2*F(:,3) +
F(:,4));

end
Y = Y.';

```

## ŽIVOTOPIS

gdje sam pohađao osnovnu školu August Cesarec. 2009 godine upisao sam Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima sa završetkom 2013. godine, nakon čega postajem redovni student Fakulteta kemijskog inženjerstva i tehnologije u Zagrebu, smjer kemijsko inženjerstvo. 2016. godine završavam preddiplomski studij i redovno upisujem diplomski; smjer kemijsko inženjerstvo, modul kemijsko-procesno inženjerstvo. 2017. godine dobitnik sam Rektorove nagrade za rad „Povećanje energetske učinkovitosti procesa destilacije primjenom dizalica topline“.